Д. А. Райков, Доказательство теоремы Л. Г. Шнирельмана о плотности арифметической суммы множеств, *УМН*, 1940, выпуск 7, 97–101

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Л. Г. ШНИРЕЛЬМАНА О ПЛОТНОСТИ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ СУММЫ МНОЖЕСТВ.

Д. А. Райков.

Характерной чертой метода Л. Г. Шнирельмана в аддитивной теории чисел, которому посвящен настоящий цикл статей, является синтез понятий теории чисел и теории множеств: объектом исследования делаются множества (последовательности) натуральных чисел; для этих множеств дается метрическая характеристика — плотность; вводится арифметическая операция над ними — особого рода сложение. Эти понятия, созданные для нужд теории чисел, переносятся, однако, в самое теорию множеств, в совокупности порождая в ней новую область, с проблемами, аналогичными проблемам той области аддитивной теории чисел, которая была создана Л. Г. Шнирельманом и его последователями.

Рассматриваются множества неотрицательных вещественных чисел, содержащие 0.

*Арифметической суммой* [1]) $A+B$ двух таких множеств $A$, $B$ называется, по Шнирельману, множество всех различных чисел вида $a+b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Так как 0 входит в $A$ и в $B$, то в арифметической сумме $A+B$ содержатся оба слагаемых множества.

*Плотностью* множества $A$ на интервале $(0, x)$ называется, по Шнирельману, величина

$$\pi_A(x) = \inf_{0<\xi<x} \frac{\underline{m}_A(0, \xi)}{\xi},$$

где $\underline{m}_A(0, \xi)$ — нижняя мера части множества $A$, расположенной на интервале $(0, \xi)$.

Как показал Серпинский, арифметическая сумма двух измеримых (по Лебегу) множеств может быть и неизмеримой (по Лебегу) [2]). Поэтому, если бы мы определяли плотность множества с помощью просто меры (а не нижней меры), то мы не могли бы, в общем случае, говорить о плотности арифметической суммы измеримых множеств.

Л. Г. Шнирельман доказал [3]), что если множества $A$ и $B$ имеют 0 точкой метрической плотности, т. е.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\underline{m}_A(0, x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\underline{m}_B(0, x)}{x} = 1,$$

[1]) Термин предложен П. С. Новиковым.

[2]) W. Sierpiński, Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel, Fundamenta Mathematicae, т. 1 (1920), стр. 105—111, в частности, стр. 111. Арифметическая сумма двух $A$-множеств есть $A$-множество (см. там же, стр. 109).

[3]) См. L. Schnirelmann, On addition of sequences and sets. Addendum, Математический сборник, т. 5 (47), вып. 1 (1939), стр. 211—214. Доказательство не было опубликовано.

то плотность арифметической суммы этих множеств не меньше суммы их плотностей, если только эта последняя сумма не превышает единицу, в каковом случае множество $A+B$ заполняет весь рассматриваемый интервал.

Пытаясь восстановить доказательство этой теоремы, я обнаружил, что требование, чтобы 0 был точкой метрической плотности множеств $A$ и $B$, излишне, так что имеет место следующая общая

Теорема. *Для любых множеств $A$ и $B$ (расположенных на полупрямой $[0, \infty)$) и для любого положительного $x$*

$$\pi_{A+B}(x) \geqslant \min\{\pi_A(x) + \pi_B(x),\ 1\}^{4)}. \tag{1}$$

Целью настоящей статьи и является доказательство этой теоремы.

В случае, если одно из множеств $A$, $B$ имеет плотность нуль, теорема тривиальна. Поэтому мы будем предполагать, что

$$\pi_A(x) > 0, \quad \pi_B(x) > 0.$$

Далее, теорема верна, если $\pi_A(x) + \pi_B(x) > 1$; именно, тогда каждая точка интервала $(0, x)$ входит в $A+B$. В самом деле, если $\xi \in (0, x)$ не входит в $A+B$, то для всякой точки $a \in A$, $a \leqslant \xi$, имеем $\xi - a \in \overline{B}$, где $\overline{B}$ означает множество, дополнительное к $B$. Поэтому $\underline{m}_A(\xi) \leqslant \underline{m}_{\overline{B}}(\xi)$ и

$$\xi \geqslant \underline{m}_{\overline{B}}(\xi) + \underline{m}_B(\xi) \geqslant \underline{m}_A(\xi) + \underline{m}_B(\xi) \geqslant [\pi_A(x) + \pi_B(x)]\,\xi > \xi.$$

Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Таким образом, мы можем предполагать, что

$$\pi_A(x) + \pi_B(x) \leqslant 1.$$

1. Докажем теорему сначала для случая, когда каждое из множеств $A$, $B$ состоит из конечного числа отрезков. Мы могли бы провести доказательство двумя способами: либо методом континуальной индукции, повидимому близким к методу, примененному самим Шнирельманом, либо непосредственно перенося в условия нашей задачи метод, которым воспользовался Безикович при рассмотрении соответствующей задачи аддитивной теории чисел [5].

Мы пойдем здесь вторым путем: он технически несколько более прост и вместе с тем дает возможность лучше понять причины различия в степени трудности между рассматриваемой задачей теории множеств (решаемой методом Безиковича до конца) и соответствующей задачей теории чисел (где этот метод не дает окончательного результата).

Будем обозначать через $m_C(x, y)$ меру части множества $C$, расположенной на интервале $(x, y)$. Заметим прежде всего, что если $v$ не принадлежит $A+B$ и $(x, y) \subset (0, v)$, то выполняется неравенство

$$y - x \geqslant m_A(x, y) + m_B(v-y,\ v-x). \tag{2}$$

[4]) Простой пример сложения отрезка с собой показывает, что равенство в (1) достижимо.

[5]) A. S. Besicovitch, On the density of the sum of two sequences of integers, Journal of the London Mathematical Society, т. 10 (1935), стр. 246—248.

Действительно, если $\xi \in A$, то $v-\xi \in \overline{B}$. Поэтому, когда $\xi$ пробегает часть множества $A$, расположенную в интервале $(x, y)$, то $v-\xi$ пробегает часть множества $\overline{B}$, расположенную в интервале $(v-y, v-x)$, так что

$$(v-x)-(v-y)=y-x=m_{\overline{B}}(v-y,\ v-x)+m_B(v-y,\ v-x)\geqslant$$
$$\geqslant m_A(x,\ y)+m_B(v-y,\ v-x),$$

что и утверждалось.

Очевидно, что при арифметическом сложении множеств, составленных из отрезков, получается опять-таки множество, составленное из отрезков. Концы отрезков рассматриваемого множества мы будем для краткости называть (левыми и правыми) концами множества.

Без ограничения общности мы можем предполагать, что правые концы множества $A$, равно как и правые концы множества $B$, не входят в соответствующее множество. Тогда и правые концы множества $A+B$ не будут входить в $A+B$.

Пусть $u_0=0$ и $v_0$ — первый правый конец множества $A+B$. Пусть $u_1$ — ближайший следующий за $v_0$ левый конец множества $A$ и $v_1$ — ближайший следующий за $u_1$ правый конец множества $A+B$, и т. д., вообще $u_k$ — ближайший следующий за $v_{k-1}$ левый конец множества $A$, а $v_k$ — ближайший следующий за $u_k$ правый конец множества $A+B$.

Пусть $u_k\leqslant x<u_{k+1}$. Имеем $(l\leqslant k)$

$$m_{A+B}(u_{l-1},\ u_l)=m_{A+B}(u_{l-1},\ v_{l-1})+m_{A+B}(v_{l-1},\ u_l)=$$
$$=v_{l-1}-u_{l-1}+m_{A+B}(v_{l-1},\ u_l)\geqslant$$
$$\geqslant m_A(u_{l-1},\ v_{l-1})+m_B(0,\ v_{l-1}-u_{l-1})^{6)}+m_{A+B}(v_{l-1},\ u_l)=$$
$$=m_A(u_{l-1},\ u_l)+m_B(0,\ v_{l-1}-u_{l-1})+m_{A+B}(v_{l-1},\ u_l).$$

Но среди точек множества $A+B$, расположенных в интервале $(v_{l-1},\ u_l)$, во всяком случае содержатся все точки, получающиеся путем сложения $u_{l-1}$ (левого конца отрезка множества $A$) со всеми точками множества $B$, лежащими в интервале $(v_{l-1}-u_{l-1},\ u_l-u_{l-1})$. Поэтому окончательно имеем

$$m_{A+B}(u_{l-1},u_l)\geqslant m_A(u_{l-1},u_l)+m_B(0,v_{l-1}-u_{l-1})+m_B(v_{l-1}-u_{l-1},u_l-u_{l-1})=$$
$$=m_A(u_{l-1},\ u_l)+m_B(0,\ u_l-u_{l-1})\geqslant$$
$$\geqslant m_A(u_{l-1},\ u_l)+\pi_B(x)(u_l-u_{l-1}).$$

Суммируя все эти неравенства по $l=1,\ 2,\ \ldots,\ k$, получаем

$$m_{A+B}(0,\ u_k)\geqslant m_A(0,\ u_k)+\pi_B(x)\sum_{l=1}^{k}(u_l-u_{l-1})=m_A(0,\ u_k)+\pi_B(x)\,u_k\geqslant \quad (3)$$
$$\geqslant[\pi_A(x)+\pi_B(x)]\,u_k. \quad (4)$$

[6]) $v_{l-1}$, как правый конец отрезка множества $A+B$, не принадлежит $A+B$, и потому мы можем применять неравенство (2).

Если теперь $x \leqslant v_k$, то $m_{A+B}(u_k, x) = x - u_k$ и, в силу (4),

$$m_{A+B}(0, x) \geqslant [\pi_A(x) + \pi_B(x)]\, u_k + (x - u_k) \geqslant [\pi_A(x) + \pi_B(x)]\, x.$$

Если же $v_k < x$ $(< u_{k+1})$, то, так же как выше, получаем:

$$\begin{aligned} m_{A+B}(u_k, x) &= m_{A+B}(u_k, v_k) + m_{A+B}(v_k, x) = v_k - u_k + m_{A+B}(v_k, x) \geqslant \\ &\geqslant m_A(u_k, v_k) + m_B(0, v_k - u_k) + m_B(v_k - u_k, x - u_k) = \\ &= m_A(u_k, x) + m_B(0, x - u_k) \geqslant m_A(u_k, x) + \pi_B(x)(x - u_k), \end{aligned}$$

и, в силу (3),

$$\begin{aligned} m_{A+B}(0, x) &= m_{A+B}(0, u_k) + m_{A+B}(u_k, x) \geqslant \\ &\geqslant m_A(0, u_k) + \pi_B(x)\, u_k + m_A(u_k, x) + \pi_B(x)(x - u_k) = \\ &= m_A(0, x) + \pi_B(x)\, x \geqslant [\pi_A(x) + \pi_B(x)]\, x. \end{aligned}$$

Таким образом для случая, когда $A$ и $B$ суть множества, составленные из конечного числа отрезков, теорема полностью доказана.

2. Переходя к общему случаю, заметим прежде всего, что если $C$ — множество положительной плотности, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в $C$ содержится совершенное множество, плотность которого менее чем на $\varepsilon$ отличается от плотности множества $C$.

Действительно, по самому определению внутренней меры, в любом отрезке $C(x, y)$ множества $C$, т. е. части множества $C$, лежащей в интервале $(x, y)$, содержится замкнутое (а значит и совершенное) множество $F$, мера которого отличается от внутренней меры множества $C(x, y)$ меньше наперед заданного $\delta$:

$$\underline{m}_C(x, y) - \delta < m_F(x, y) \leqslant \underline{m}_C(x, y). \tag{5}$$

Разобьем теперь интервал $(0, x)$ на части точками $\frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \ldots, \frac{x}{2^n}, \ldots$ и для каждой части $C\left(\frac{x}{2^{n+1}}, \frac{x}{2^n}\right)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ множества $C$ возьмем содержащееся в ней совершенное множество $F_n$, удовлетворяющее неравенству (5) с $\delta = \frac{\varepsilon x}{2^{n+2}}$. Множество $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n + F_\infty$, где $F_\infty$ есть множество, состоящее из одной точки 0, будет совершенным. Покажем, что его плотность будет отличаться от плотности множества $C$ менее чем на $\varepsilon$. Пусть $\xi$ — произвольная точка интервала $(0, x)$ и $\frac{x}{2^{k+1}} \leqslant \xi < \frac{x}{2^k}$. Имеем

$$\underline{m}_C(0, \xi) \geqslant m_F(0, \xi) = \sum_{n=k+1}^{\infty} m(F_n) + m_{F_k}\left(\frac{x}{2^{k+1}}\quad\right) >$$

$$> \sum_{n=k+1}^{\infty} \left\{\underline{m}_C\left(\frac{x}{2^{n+1}}, \frac{x}{2^n}\right) - \frac{\varepsilon x}{2^{n+2}}\right\} + \left\{\underline{m}_C\left(\frac{x}{2^{k+1}}, \xi\right) - \frac{\varepsilon x}{2^{k+2}}\right\} = \underline{m}_C(0, \xi) - \frac{\varepsilon x}{2^{k+1}},$$

откуда

$$\frac{\underline{m}_C(0, \xi)}{\xi} \geqslant \frac{m_F(0, \xi)}{\xi} > \frac{\underline{m}_C(0, \xi)}{\xi} - \frac{\varepsilon x}{2^{k+1}\xi} \geqslant \frac{\underline{m}_C(0, \xi)}{\xi} - \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Так как арифметическая сумма множеств содержит арифметическую сумму их подмножеств, то из доказанного, ввиду произвольной малости $\varepsilon$, следует, что достаточно доказать теорему для случая, когда $A$ и $B$ — совершенные множества.

Пусть $\delta_1, \delta_2, \ldots$ $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots)$ — последовательность всех дополнительных интервалов множеств $A$ $(B)$ на интервале $[0, x)$ и пусть $A_n$ $(B_n)$ — множество, получающееся выкидыванием из $[0, x)$ совокупности интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ $(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$. $A_n$ и $B_n$ составлены каждое из конечного числа отрезков и при безграничном увеличении $n$ стягиваются, монотонно убывая, соответственно к множествам $A$ и $B$. Имеем

$$\frac{m_{A_n}(0, \xi)}{\xi} \geqslant \frac{m_A(0, \xi)}{\xi} \geqslant \pi_A(x), \qquad \frac{m_{B_n}(0, \xi)}{\xi} \geqslant \frac{m_B(0, \xi)}{\xi} \geqslant \pi_B(x) \qquad (\xi \in (0, x)),$$

и значит, по доказанному в п. 1,

$$m_{A_n+B_n}(0, \xi) \geqslant [\pi_A(x) + \pi_B(x)]\,\xi. \tag{6}$$

При возрастании $n$ множества $A_n + B_n$ убывают. Покажем, что они стремятся при этом к $A + B$. Пусть $c \in \Pi(A_n + B_n)$. Для любого $n$ имеем

$$c = a_n + b_n, \quad a_n \in A_n, \quad b_n \in B_n.$$

Так как $a_n$ ограничены, то можно выбрать подпоследовательность $a_{n_i}$, сходящуюся к некоторому пределу $a$, который, в силу стремления $A_n$ к $A$ и замкнутости $A$, принадлежит $A$. Точно так же из последовательности $b_{n_i}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к $b \in B$. Тогда

$$c = a + b \in A + B.$$

Таким образом

$$A + B \supset \Pi(A_n + B_n) \supset A + B,$$

т. е. действительно $A + B = \Pi(A_n + B_n)$. В силу этого мы получаем из (6) в пределе неравенство

$$m_{A+B}(0, \xi) \geqslant [\pi_A(x) + \pi_B(x)]\,\xi, \qquad \xi \in (0, x),$$

чем доказательство теоремы Л. Г. Шнирельмана завершается.