Л. Г. Шнирельман, О равномерных приближениях, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1938, том 2, выпуск 1, 53–60

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Л. Г. ШНИРЕЛЬМАН

О РАВНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

В статье рассматриваются в общей постановке некоторые задачи Чебышевского типа. В основу кладется геометрическая теорема Helly о пересечении выпуклых тел в n-мерном пространстве.

В настоящей статье рассматриваются в общей постановке некоторые задачи Чебышевского типа.

Пусть x точка абстрактного пространства R, M некоторое множество точек в этом пространстве, $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ функция n вещественных параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и точки x, принимающая вещественные значения.

Наименьшим уклонением от нуля функции $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ на множестве M будем называть, как обычно, нижнюю грань при различных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ максимумов $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ на множестве M.

ТЕОРЕМА 1. *Если выполняются условия:*

a) $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ ограничена на множестве M при некоторой системе значений параметров $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и непрерывна относительно $c_1, c_2, \ldots, c_n$, равномерно относительно x;

b) неравенство $|F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)| < k$ определяет при любом фиксированном x и положительном k выпуклую область в n-мерном пространстве параметров $c_1, \ldots, c_n$;

c) пересечение тел $F(c_1, \ldots, c_n, x)$ при какой-нибудь системе значений $x_1, x_2, \ldots, x_l$ есть ограниченное тело,

то имеет место заключение:

Наименьшее уклонение от нуля $F(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$ на множестве M равно верхней грани наименьших уклонений $F(c_1, \ldots, c_n, x)$ на всех системах, состоящих из $n+1$ точек, взятых из M.

Доказательство. Рассмотрим совокупность точек в пространстве параметров $c_1, \ldots, c_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$|F(c_1, \ldots, c_n, x_i)| \leqslant k \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

При достаточно большом k эта система неравенств имеет решения (из условия a). Определим нижнюю грань k_0 таких значений k, для которых написанная система неравенств имеет решения для любой системы из $n+1$ точек $x_1, \dots, x_{n+1}$.

Рассмотрим совокупность тел, определенных неравенствами

$$|F(c_1, c_2, \dots, c_n, x)| \leqslant k + \varepsilon,$$

где x пробегает все точки множества M. Все эти тела (при любом x) по условию b) выпуклы. Пересечение каждых $n+1$ из числа этих выпуклых тел не пусто и пересечение конечного числа каких-нибудь из них — ограниченное тело [условие с)]. Согласно геометрической теореме Helly, если совокупность выпуклых тел в n-мерном пространстве такова, что любые $n+1$ из них имеют общую точку, причем пересечение какого-нибудь конечного числа из них ограничено, то и все тела совокупности имеют общую точку.

Поэтому в нашем случае существует система значений $c_1, c_2, \dots$ $\dots, c_n$, удовлетворяющая сразу всем неравенствам

$$|F(c_1, \dots, c_n, x)| \leqslant k + \varepsilon,$$

каково бы ни было фиксированное $\varepsilon > 0$. С другой стороны, из определения k_0 следует, что неравенства

$$|F(c_1, c_2, \dots, c_n, x)| \leqslant k - \varepsilon$$

были бы несовместны, если придать x уже соответственно подобранные $n+1$ значений из M; тем более они несовместны при любых x, принадлежащих M.

Таким образом, k_0 есть нижняя грань значений k, для которых система неравенств $|F(c_1, \dots, c_n, x)| \leqslant k$ совместна при любых x из M.

Так как пересечение каких-нибудь l тел $|F(c_1, \dots, c_n, x)| \leqslant k + \varepsilon$ есть ограниченное тело и функция $F(c_1, \dots, c_n, x)$ непрерывна по отношению к $c_1, \dots, c_n$, равномерно относительно x, то можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить функцию

$$F(c_1^0, \dots, c_n^0, x),$$

для которой выполнены неравенства

$$|F(c_1^0, \dots, c_n^0, x)| \leqslant k_0 \quad \text{при любом } x \subset M.$$

П р и м е ч а н и е. Отбрасывая условие b), легко построить пример функции $F(c_1, c_2, \dots, c_n, x)$, для которой наименьшее уклонение на M не совпадает с верхней гранью наименьших уклонений на системах из $n+1$ точек, и даже на системах из любого конечного числа точек.

С другой стороны, условие b) не необходимо и его можно было бы заменить другими предположениями, связанными с обобщением теоремы Helly.

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим частный случай, когда* $F(c_1, \dots, c_n, x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) - f(x)$ и M *состоит из* $n+1$ *точек* $x_1, \dots, x_{n+1}$. Предположим, что все определители матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \dots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{matrix} \right\|$$

n-ого порядка отличны от нуля. В таком случае

1° *существует одна и только одна система значений* $c_1^0, \dots, c_n^0$, *для которой осуществляется наименьшее уклонение;*

2° *все разности* $h_k = \sum_{i=1}^{h} c_i^0 \varphi_i(x_k) - f(x_k)$ $(k = 1, \dots, n+1)$ *равны между собой по абсолютной величине;*

3° *все произведения* $(-1)^k \Delta_k h_k$ *имеют одинаковые знаки.*

Через Δ_k *обозначен определитель*

$$\left| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{k-1}) & \varphi_2(x_{k-1}) & \dots & \varphi_n(x_{k-1}) \\ \varphi_1(x_{k+1}) & \varphi_2(x_{k+1}) & \dots & \varphi_n(x_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \dots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{matrix} \right|$$

Доказательство. Рассмотрим систему из $n+1$ уравнений

$$\begin{matrix} c_1\varphi_1(x_1) & + \dots + & c_n\varphi_n(x_1) & = f(x_1) + h_1 \\ c_1\varphi_1(x_2) & + \dots + & c_n\varphi_n(x_2) & = f(x_2) + h_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1\varphi_1(x_{n+1}) & + \dots + & c_n\varphi_n(x_{n+1}) & = f(x_{n+1}) + h_{n+1} \end{matrix}$$

Пусть c_i подобраны так, что наибольшее из h_i имеет наименьшее значение. Если бы при этом не все h_i были равны по абсолютной величине, например, h_{n+1} меньше максимума остальных, то можно было бы придать первым n из них достаточно малые приращения, уменьшающие их абсолютную величину, и, пользуясь неравенством нулю определителя при c_i, изменить c_i так, чтобы уменьшить максимальные из h_j. Поэтому h_j равны между собою по абсолютной величине:

$$h_j = \pm h.$$

Для определения знаков h_j составим выражения для приращения Δh_j через Δc_i

$$\begin{aligned}
\Delta h_1 &= \Delta c_1\varphi_1(x_1) + \ldots + \Delta c_n\varphi_n(x_1)\\
\Delta h_2 &= \Delta c_1\varphi_1(x_2) + \ldots + \Delta c_n\varphi_n(x_2)\\
\ldots & \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
\Delta h_{n+1} &= \Delta c_1\varphi_1(x_{n+1}) + \ldots + \Delta c_n\varphi_n(x_{n+1})
\end{aligned}$$

Между Δh_j существует одно и только одно соотношение:

$$\begin{vmatrix}
\varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) & \Delta h_1\\
\varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) & \Delta h_2\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}) & \Delta h_{n+1}
\end{vmatrix} = 0,$$

т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n+1}(-1)^i\Delta_i\Delta h_i = 0.$

Из невозможности уменьшить абсолютные величины h_j следует, что нельзя подобрать решений Δh_j этого уравнения, противоположных по знакам h_j. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^i\Delta_i h_i$ имели одинаковые знаки.

Таким образом, можем положить

$$h_i = (-1)^{i+1}\operatorname{sign}\Delta_i \cdot h,$$

где h может быть и положительным и отрицательным.

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&c_1\varphi_1(x_1) + c_2\varphi_2(x_1) + \ldots + c_n\varphi_n(x_1) - \operatorname{sign}\Delta_1 h = f(x_1)\\
&c_1\varphi_1(x_2) + c_2\varphi_2(x_2) + \ldots + c_n\varphi_n(x_2) + \operatorname{sign}\Delta_2 h = f(x_2)\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&c_1\varphi_1(x_i) + c_2\varphi_2(x_i) + \ldots + c_n\varphi_n(x_i) + (-1)^i\operatorname{sign}\Delta_i h = f(x_i)\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&c_1\varphi_1(x_{n+1}) + c_2\varphi_2(x_{n+1}) + \ldots + c_n\varphi_n(x_{n+1}) + (-1)^{n+1}\operatorname{sign}\Delta_{n+1} h = f(x_{n+1})
\end{aligned}$$

Отсюда

$$h = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1}(-1)^i\Delta_i f(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}|\Delta_i|}.$$

Замечание. Какова бы ни была система из $n+1$ точек, всегда можно подобрать функцию $f(x)$, обладающую тем свойством, что наилучшее приближение $f(x)$ на M с помощью линейной комбинации $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ совпадает с наилучшим приближением $f(x)$ на данных произвольно $n+1$ точках из M.

Пусть ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \dots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{matrix} \right\|$$

равен k $(k \leqslant n)$.

Все $\varphi_l(x_i)$ $(l > k)$ выражаются линейно через $\varphi_t(x_i)$ $(t = 1, 2, \dots$ $\dots, k)$, т. е.

$$\varphi_l(x_i) = \sum_{t=1}^{k} c_{lt} \varphi_t(x_i)$$

$$(l = k + 1, \dots, n;\ t = 1, \dots, k;\ i = 1, \dots, n + 1).$$

Поэтому наилучшее приближение с помощью $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ для системы точек $x_1, \dots, x_{n+1}$ совпадает с наилучшим приближением с помощью функций $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$.

Пусть какой-нибудь минор k-го порядка, например

$$\left| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_k(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_k(x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_k) & \dots & \varphi_k(x_k) \end{matrix} \right|$$

не равен нулю. Прибавим к точкам $x_1, \dots, x_k$ еще одну точку, например x_{k+1}, и определим функцию $f(x)$ так: в точке x_i положим ее равной $\operatorname{sign} \delta_i$, где

$$\delta_i = \left| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_k(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{i-1}) & \dots & \varphi_k(x_{i-1}) \\ \varphi_1(x_{i+1}) & \dots & \varphi_k(x_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{k+1}) & \dots & \varphi_k(x_{k+1}) \end{matrix} \right|$$

Не все подобные определители равны нулю. Во всех точках множества M за исключением $x_1, \dots, x_{k+1}$ положим $|f(x)| < 1$. Наилучшее приближение этой функции с помощью $L(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots$ $\dots + c_k\varphi_k(x)$ (а значит, и $c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$) не может быть меньше 1. В противном случае знаки $L(x_i)$ должны были бы быть противоположны знакам $f(x_i)$, т. е. совпадать с $-\operatorname{sign}\delta_i$. Но это противоречит очевидному соотношению $\sum \delta_i L_i = 0$ при $x = x_1, \dots, x_k$.

Заметим, что функцию $f(x)$ можно было бы подчинить дополнительному соотношению

$$|f(x)| < 1 - A(x),$$

где $A(x)$ — любая функция, обращающаяся в нуль в точках $x_1, \dots, x_{k+1}$ и меньшая 1 всюду на M.

ТЕОРЕМА 3. 1° *Наименьшее уклонение линейной комбинации*

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) \text{ от } f(x)$$

на множестве M *совпадает с наименьшим уклонением этой комбинации от* $f(x)$ *на некоторой системе из* $n+1$ *точек из* M, *если определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

не тождественно равен нулю, все $\varphi_i(x)$, $f(x)$ *ограничены на* M. *Это наименьшее уклонение фактически достигается для некоторых*

$$c_1^0, \ldots, c_n^0.$$

2° *Если* M *компактно и на* M^n *существует всюду плотное множество систем* $x_1, \ldots, x_n$, *для которых предыдущий определитель отличен от нуля,* $\varphi_i(x)$, $f(x)$ *непрерывные функции, то наименьшее уклонение на* M *есть максимум выражения*

$$\frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) & f(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) & f(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}) & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} \left\| \begin{matrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{i-1}) & \varphi_2(x_{i-1}) & \ldots & \varphi_n(x_{i-1}) \\ \varphi_1(x_{i+1}) & \varphi_2(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{i+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{matrix} \right\|}$$

при различных $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, *взятых из* M.

Доказательство. 1° вытекает из теоремы 1, если принять во внимание, что в случае нетождественного обращения в нуль определителя Δ, объем пересечения выпуклых тел, рассмотренных в теореме 1, конечен, а линейная комбинация c_i с ограниченными коэффициентами непрерывна относительно c_i равномерно относительно x. 2° следует из теоремы 2, если учесть непрерывность $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, $f(x)$ и компактность M.

Из приведенных теорем можно вывести необходимое и достаточное условие Haar'а для единственности линейной комбинации $c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$, дающей наименьшее отклонение от $f(x)$ на компактном множестве M. Это условие заключается в необращении в нуль определителя Δ ни для какой системы точек $x_1, \ldots, x_n$, взятых из M.

Пусть Δ нигде не обращается в нуль. Выберем на основании теоремы 1 систему из $n+1$ точек $x_1^0, \ldots, x_{n+1}^0$, наилучшее приближение для которой совпадает с наилучшим приближением на M. Но для такой системы при необращении в нуль Δ из теоремы 2 следует единственность линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i$, дающей наилучшее приближение.

Для доказательства обратного допустим, что для системы точек $x_1', \ldots, x_n'$ определитель Δ равен нулю. Существует линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n+1} \rho_i\varphi_i(x)$, обращающаяся в нуль при $x = x_1, \ldots, x_n$. Умножив ее на достаточно малое постоянное число, можем сделать ее всюду на M меньшей 1 по абсолютной величине. Отождествим эту линейную комбинацию с функцией $A(x)$ из замечания к теореме 2. Тогда построенная там функция $f(x)$ имеет наилучшее приближение на M с помощью $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, равное 1. Оно осуществляется, с одной стороны, линейной комбинацией $\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$, где все c_i равны нулю, а с другой стороны, системой значений $c_i = \rho_i$, где ρ_i не все равны нулю, что и доказывает неоднозначность решения Чебышевской задачи, если Δ для какой-нибудь системы $x_1', \ldots, x_n'$ обращается в нуль.

Из доказанных общих теорем можно получить как частный случай теоремы о равномерных приближениях функций в n-мерных эвклидовых пространствах и о равномерных приближениях функционалов.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
7.XII.1937.

L. SCHNIRELMANN. SUR LES APPROXIMATIONS UNIFORMES

RÉSUMÉ

Dans la note presente nous considérons quelques problèmes du type de Tchebycheff au point de vue général. Nos considérations sont basées sur le théorème géometrique de Helly.

Soit x un point quelconque de l'espace abstrait R, M un ensemble dans cet espace, $F(c_1, \cdots, c_n, x)$ une fonction de n paramètres réels et du point x. L'écart minimum de 0 de la fonction F sur l'ensemble M est la borne inférieure de maximum de F sur M pour toutes les valeurs de $c_1, \cdots, c_n$.

THÉORÈME 1. *Si les conditions suivantes ont lieu*

a) $F(c_1, \ldots, x)$ *est bornée sur* M *au moins pour un système de* $c_1, \ldots, c_n$ *et continue par rapport à* $c_1, \ldots, c_n$, *également pour tous les* x;

b) *il existe un tel système de valeurs de* $x - x_1, \dots, x_l$ *que l'intersection des corps ci-dessus est un corps fini,*—

l'écart minimum de F *sur* M *est égal à la borne supérieure des écarts minima de* F *sur tous les systèmes qui consistent de* $n+1$ *points de* M.

Considérons le cas particulier, où

$$F = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) - f(x)$$

et M consiste de $n+1$ points $x_1, \dots, x_{n+1}$. Désignons par Δ_k les déterminants

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{k-1}) & \dots & \varphi_n(x_{k-1}) \\ \varphi_1(x_{k+1}) & \dots & \varphi_n(x_{k+1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \dots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{vmatrix} \qquad (k = 1, \dots, n+1).$$

THÉORÈME 2. *Si tous les* Δ_k *sont différents de* 0

1) *il existe toujours seulement un système* $c_1^0, \dots, c_n^0$ *pour lequel l'écart minimum est atteint;*

2) *toutes les différences* $h_k = \sum c_i^0\varphi_i(x_k) - f(x_k)$ $(k = 1, \dots, n+1)$ *ont la même valeur absolue;*

3) *les produits* $(-1)^k \Delta_k h_k$ *ont le même signe.*

THÉORÈME 3. *Si* M *est compact,* $\varphi_i(x)$, $f(x)$ *sont continues sur* M *et*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

est différent de 0 *sur un ensemble des systèmes* $x_1, \dots, x_n$ *dense partout sur* M^n, *l'écart minimum de l'expression* $c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ *de* $f(x)$ *sur* M *coïncide avec le maximum de*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \Delta_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n+1} |\Delta_i|}$$

pour les divers systèmes des points $x_1, \dots, x_{n+1}$ *de* M.

Des théorèmes enoncés decoule la condition de Haar pour l'unicité d'expression $c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) - f(x)$ qui réalise l'écart minimum de $f(x)$ sur l'ensemble compact M.