Л. Г. Шнирельман, Об аддитивных свойствах чисел, *УМН*, 1939, выпуск 6, 9–25

# ОБ АДДИТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ЧИСЕЛ [1]).

Л. Г. Шнирельман.

Назовем последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ последовательностью плотности больше $\alpha$ ($\alpha > 0$), если нижний предел отношения $\frac{k}{n_k}$ больше $\alpha$.

Первая основная лемма. *Какова бы ни была последовательность $n_1, n_2, \ldots$ плотности, большей $\alpha > 0$, можно разложить всякое число $x$ на сумму $2\left[\frac{1}{\alpha}\right]$ членов этой последовательности, с точностью до слагаемого, не превосходящего фиксированной константы $A$ (не зависящей от разлагаемого $x$, а только от последовательности $n_1, n_2, \ldots$).*

Обозначим через $N(x)$ число членов последовательности $n_1, n_2, \ldots$, не превосходящих $x$.

Если $N(x) > \frac{x}{2}$, то число $x$, очевидно, разлагается на сумму двух членов последовательности. В самом деле, рассмотрим последовательность $x - n_1$, $x - n_2, \ldots, x - n_k, \ldots$; число членов этой последовательности, не превосходящих $x$, таково же, как и предыдущей, т. е. больше $\frac{x}{2}$. Поэтому существует такой член $n_i$ первой последовательности, который равен некоторому члену $x - n_j$ второй последовательности. Отсюда выводим: $x = n_i + n_j$.

Пусть $N(x) \leqslant \frac{x}{2}$. Если плотность последовательности превосходит $\alpha > 0$, то существует число $p$, обладающее следующим свойством: каково бы ни было $m \geqslant p$, имеет место соотношение $N(m) \geqslant (\alpha - \sigma)\, m$ ($\sigma$ есть как угодно малое положительное число).

Предположим, что $x \geqslant p$.

Рассмотрим сумму $R(x)$ всех разностей $n_{i+1} - n_i$, которые больше, чем $p$, при $n_i < n_{i+1} \leqslant x$.

Возможны два случая: 1) $R(x) \leqslant \frac{1}{2} x$, 2) $R(x) > \frac{1}{2} x$.

В первом случае количество всех целых чисел, отличающихся от членов последовательности $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ не более чем на $\frac{1}{2}(p+1)$, больше чем $\frac{1}{2} x$. Поэтому можно разложить $x$ на сумму двух членов последовательности $n_1, n_2, \ldots$ и одного слагаемого, не превосходящего $p + 1$.

---

[1]) Впервые опубликовано в „Известиях Донского Политехнического Института в Новочеркасске“, т. XIV (1930), стр. 3—27.

Во втором случае введем между каждыми двумя последовательными членами $n_i$ и $n_{i+1}$ нашей последовательности такими, что $n_{i+1}-n_i>p$, следующий ряд чисел: $n_i+n_1, n_i+n_2, \ldots, n_i+n_j$ (до наибольшего $n_i+n_j$, не превосходящего $n_{i+1}$). В силу свойств числа $p$ мы получаем $j\geqslant(\alpha-\sigma)(n_{i+1}-n_i')$. Общее число введенных членов превосходит $(\alpha-\sigma)\sum(n_{i+1}-n_i)=(\alpha-\sigma)R(x)\geqslant\frac{1}{2}(\alpha-\sigma)x$. Обозначим члены новой последовательности через $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ Эта последовательность содержит более чем $(\alpha-\sigma)x+\frac{\alpha-\sigma}{2}x$ членов, не превосходящих $x$. Если это число больше, чем $\frac{x}{2}$, то $x$ может быть разложено на сумму двух членов новой последовательности, т. е. четырех членов первоначальной. В противном случае повторим предыдущее рассуждение применительно к новой последовательности $m_1, m_2, \ldots$

Образуем снова сумму $R_1(x)$ всех разностей $m_{i+1}-m_i$, не превосходящих $p$; опять возможны два случая: $R_1(x)\leqslant\frac{x}{2}$ и $R_1(x)>\frac{x}{2}$. В первом случае возможно разложить $x$ на сумму двух членов последовательности $m_1, m_2, \ldots$, т. е. четырех членов первоначальной последовательности, во втором случае, или число $x$ разлагается на сумму восьми членов первоначальной последовательности, или можно снова повторить предыдущий процесс.

Продолжая это рассуждение, мы докажем, что или число $x$ разлагается на сумму $k$ членов первоначальной последовательности и слагаемого, не превосходящего $p+1$, или возможно построить последовательность, состоящую из $(k+1)$-кратных сумм членов первоначальной последовательности и притом такую, что количество членов этой новой последовательности, не превосходящих $x$, больше чем $(\alpha-\sigma)x+\frac{k}{2}(\alpha-\sigma)x=\frac{k+2}{2}(\alpha-\sigma)x$. Когда $\frac{k+2}{2}(\alpha-\sigma)$ превзойдет $\frac{1}{2}$, т. е. $k\geqslant\left[\frac{1}{\alpha-\sigma}\right]-1$, то наш процесс заканчивается, так как в последней последовательности число членов ее, не превосходящих $x$, больше $\frac{1}{2}x$. Таким образом $x$ разложится на сумму не более чем $2\left[\frac{1}{\alpha-\sigma}\right]$ членов первоначальной последовательности и на слагаемое, не превосходящее $p+1$. Это доказывает лемму при $A=p+1$ (так как при достаточно малом $\sigma>0$ $\left[\frac{1}{\alpha-\sigma}\right]=\left[\frac{1}{\alpha}\right]$).

Лемма вторая. *Рассмотрим последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, где $n_j<Cj\varphi(j)$ ($\varphi(j)$ есть возрастающая функция от $j$, такая, что $\varphi(j)=o(\sqrt{j})$).*

*Обозначим через $A(u,x)$ число решений уравнения $n_j-n_i=u$, где $n_i<n_j\leqslant x$, и через $T(x,s)$ сумму $\sum\limits_{u=1}^{s}A^2(u, x)$.*

*Если при любом $x>0$ $T(x, s)<ks\frac{x^2}{\varphi^4(x)}$, то всякое число $x$ разлагается на сумму ограниченного числа $L$ членов последовательности $n_1, n_2, \ldots$ и одного слагаемого, не превосходящего $A$. $L$ и $A$ не зависят от разлагаемого числа $x$, а только от последовательности $n_1, n_2, \ldots$*

Доказательство. Образуем таблицу с двойным входом

$$\begin{array}{cccc}
n_1, & n_2, & \ldots, & n_k \\
2n_1, & n_1+n_2, & \ldots, & n_1+n_k \\
n_2+n_1, & 2n_2, & \ldots, & n_2+n_k \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n_l+n_1, & n_l+n_2, & \ldots, & n_l+n_k
\end{array}$$

и оценим количество различных членов этой таблицы, не превосходящих $x$.

Пусть $n_k \leqslant x < n_{k+1}$. Первая строка таблицы содержит более чем $\frac{x}{C\varphi(x)}$ членов, вторая — более чем $\frac{x-n_1}{C\varphi(x-n_1)} - A(n, x)$ новых членов, третья — более чем $\frac{x-n_2}{C\varphi(x-n_2)} - A(n_2, x) - A(n_2-n_1, x)$ членов, не принадлежащих первым двум строкам, и т. д.

Вся таблица содержит $M(x)$ различных членов, где

$$\begin{aligned}
M(x) \geqslant & \frac{x}{C\varphi(x)} + \frac{x-n_1}{C\varphi(x-n_1)} - A(n_1, x) + \\
& + \frac{x-n_2}{C\varphi(x-n_2)} - A(n_2, x) - A(n_2-n_1, x) + \ldots + \\
& + \frac{x-n_l}{C\varphi(x-n_l)} - A(n_l, x) - A(n_l-n_1, x) - \ldots - A(n_l-n_{l-1}, x) = \\
& = \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{l} \frac{x-n_j}{\varphi(x-n_j)} - \sum_{u=1}^{n} A(u, x)\,A(u, n_l),
\end{aligned}$$

так как каждое $A(u, x)$ встречается столько раз, сколькими способами число $u$ может быть представлено в виде разности $n_j - n_i$, где $n_i < n_j \leqslant n_l$, т. е. $A(u, n_l)$ раз.

На основании теоремы Шварца имеем

$$\begin{aligned}
M(x) & \geqslant \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{l} \frac{x-n_j}{\varphi(x-n_j)} - \sqrt{\sum_{u=1}^{n_l} A^2(u, x) \sum_{u=1}^{n_l} A^2(u, n_l)} = \\
& = \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{l} \frac{x-n_j}{\varphi(x-n_j)} - \sqrt{T(x, n_l)\,T(n_l, n_l)}.
\end{aligned}$$

Выберем $l = \alpha\varphi(x)$ ($\alpha$ есть вещественное число, большее 0).

Мы имеем $n_l < C\alpha\varphi(x)\varphi[\alpha\varphi(x)]$. Так как $\varphi(x) = o(\sqrt{x})$, то $\frac{x-n_j}{\varphi(x-n_j)} > (1-\eta)\frac{x}{\varphi(x)}$ (где $\eta$ как угодно мало, $x$ достаточно велико).

Вставляя эти выражения в предыдущее неравенство, получаем, на основании условия леммы,

$$\begin{aligned}
M(x) & \geqslant \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - \sqrt{\frac{kn_l x^2}{\varphi^4(x)} \frac{kn_l n_l^2}{\varphi^4(n_l)}} = \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - k\frac{x n_l^2}{\varphi^2(x)\varphi^2(n_l)} = \\
& = \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - kx\frac{\{C\alpha\varphi(x)\varphi[\alpha\varphi(x)]\}^2}{\varphi^2(x)\varphi^2\{C\alpha\varphi(x)\varphi[\alpha\varphi(x)]\}} \geqslant \\
& \geqslant \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - \alpha^2 C^2 kx \frac{\{\varphi[\alpha\varphi(x)]\}^2}{\{\varphi[\alpha\varphi(x)]\}^2} = \frac{(1-\eta)\alpha x}{C} - \alpha^2 C^2 kx
\end{aligned}$$

(ибо при достаточно большом $x$ $\varphi\{\alpha\varphi(x)\varphi[\alpha\varphi(x)]\} > \varphi[\alpha\varphi(x)]$).

Выбирая $\alpha = \frac{1-\eta}{2kC^3}$, получаем $M(x) > \frac{(1-\eta)^2}{4kC^4} x$, т. е. при достаточно большом $x$ таблица содержит больше чем $\frac{(1-\eta)^2}{4kC^4} x$ членов, не превосходящих $x$.

Располагая члены таблицы в порядке возрастания, мы получаем последовательность, плотность которой не меньше чем $\frac{(1-\eta)^2}{4kC^4}$.

Лемма вторая есть, таким образом, следствие первой леммы.

Лемма третья. *Для последовательности простых чисел* $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ *имеют место соотношения*: $\varphi(x) = \ln x$, $C = 1 + \varepsilon$ *и* $A(u, x) < \frac{100x}{\ln^2 x} S(u)$, $S(u) = \prod \left(\frac{p_i - 1}{p_i - 2}\right)$, *где произведение распространено на все различные нечетные простые делители* $p_i$ *числа* $u$ ($\varepsilon$ *как угодно мало*).

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству формулы $Z(x) < \frac{100x}{\ln^2 x}$, данному Viggo Brun'ом, где $Z(x)$ есть число простых близнецов, не превосходящих $x$.

Лемма четвертая. *Положим* $S(u) = \prod \left(\frac{p_i - 1}{p_i - 2}\right)$, *как в лемме* 3. *Мы имеем* $\sum_{u=1}^{r} S^2(u) < kr$, *где* $k$ *есть постоянная.*

Доказательство. Рассмотрим произведение $P(u) = \prod \left(1 + \frac{1}{p_i}\right)$, распространенное на все различные нечетные простые множители $p_i$ числа $u$. Имеем

$$\frac{S(u)}{P(u)} = \prod \frac{p-1}{p-2} \frac{p}{p+1} = \prod \frac{p^2 - p}{p^2 - p - 2} = \prod \left(1 + \frac{2}{p^2 - p - 2}\right) <$$
$$< \prod_{p=3}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{p^2 - p - 2}\right) = k_1,$$

где $k_1$ — постоянная. Следовательно,

$$\sum_{u=1}^{r} S^2(u) < k_1^2 \sum_{u=1}^{r} P^2(u).$$

Мы имеем $P(u) = \sum \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}}$, $p_{i_\nu}$ суть простые делители числа $u$.

Далее, $P^2(u) = \sum \frac{2^\mu}{p_{i_1} \cdots p_{i_\mu} p_{i_{\mu+1}}^2 \cdots p_{i_\nu}^2}$, так как число способов, коими можно разложить произведение $p_{i_1} \cdots p_{i_\mu} p_{i_{\mu+1}}^2 \cdots p_{i_\nu}^2$ на произведения вида $p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_j}$, есть $2^\mu$. Следовательно,

$$\sum_{u=1}^{r} P^2(u) = \sum \frac{2^\mu \left[\frac{r}{p_{i_1} \cdots p_{i_\mu} p_{i_{\mu+1}} \cdots p_{i_\nu}}\right]}{p_{i_1} \cdots p_{i_\mu} p_{i_{\mu+1}}^2 \cdots p_{i_\nu}^2} < \sum \frac{2^\mu r}{p_{i_1}^2 \cdots p_{i_\mu}^2 p_{i_{\mu+1}}^3 \cdots p_{i_\nu}^3} <$$
$$< \sum \frac{2^\mu r}{p_{i_1}^{\frac{3}{2}} \cdots p_{i_\mu}^{\frac{3}{2}} p_{i_{\mu+1}}^3 \cdots p_{i_\nu}^3} < r \prod_{u=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{p_u^{\frac{3}{2}}}\right) = k_2 r.$$

(Последнее произведение распространено на все простые числа и, очевидно, сходится.)

Получаем окончательно

$$\sum_{u=1}^{r} S_2(u) < (k_1 k_2)^2 r = kr \quad (k = k_1^2 k_2^2).$$

Из предшествующих лемм вытекают следующие предложения:

Теорема 1. *Всякое целое число $x$ может быть разложено на сумму ограниченного числа $L$ простых чисел, где $L$ не зависит от $x$.*

Справедливость этой теоремы вытекает из третьей и четвертой лемм.

Теорема 2. *Какова бы ни была подпоследовательность $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}, \ldots$ простых чисел положительной относительной плотности (т. е. такая, что отношение $\frac{p_k}{p_{i_k}}$ больше $\alpha > 0$), всякое число $x$ может быть разложено на ограниченное число $L$ членов этой подпоследовательности и на слагаемое, не превосходящее фиксированной величины $A$ ($L$ и $A$ не зависят от $x$).*

Справедливость этой теоремы вытекает из тех же лемм, что и предыдущей.

Следствие. В частности, можно разложить $x$ на сумму ограниченного числа $L$ простых чисел, заключенных в арифметической прогрессии $at+b$ ($a$ и $b$ взаимно простые), и слагаемого, не превосходящего $A$ ($L$ и $A$ не зависят от $x$).

Теорема. *Всякое число $x > 0$ можно разложить на 26 множителей вида $n^n$ ($n$ — целое) с относительной точностью до ограниченного фактора $x_0$ ($1 \leqslant x_0 < A$, где $A$ не зависит от разлагаемого числа).*

Доказательство. Оценим число решений уравнения $[n \ln n] - [m \ln m] = u$, где $u$ — некоторое целое число, удовлетворяющее неравенству $\ln^3 x \leqslant u \leqslant \ln^4 x$, а $n$ и $m$ удовлетворяют неравенствам $m \ln m < n \ln n \leqslant x$. Число решений рассматриваемого уравнения не превосходит числа решений неравенства $u - 1 < k \ln n + m \ln\left(1 + \frac{k}{m}\right) < u + 1$.

Число тех из решений этого неравенства, для которых $n < x^{1-\varepsilon}$, не более чем $x^{1-\varepsilon}$, ввиду того, что каждому значению $n$ отвечает не более одного решения уравнения $[n \ln n] - [m \ln m] = u$.

Рассмотрим поэтому, сколько имеется решений, для которых $n > x^{1-\varepsilon}$. Ввиду $k < u$ и $u < \ln^4 x$, $k = o(m)$ [ибо $k = o(x^{1-\varepsilon})$].

Поэтому можно рассмотреть число решений неравенства $u - 1 < k \ln n + k < u + 1$, т. е. при данном $k$: $\frac{u-1}{k} < \ln n + 1 < \frac{u+1}{k}$.

Число различных значений $n$ не более чем

$$e^{\frac{u+1}{k} - 1} - e^{\frac{u-1}{k} - 1} = e^{\frac{u-1}{k} - 1}\left(e^{\frac{2}{k}} - 1\right) < \frac{2+\Theta}{k} e^{\frac{u-1}{k} - 1}.$$

[$\Theta$ сколь угодно мало при больших $x$ ввиду $x^{1-\varepsilon} < n$, а следовательно,

$$k > \frac{u-1}{\ln n} > \frac{\ln^3 x}{\ln x} = \ln^2 x.\Big]$$

Число всех возможных решений (при различных значениях $k$) не более чем

$$\sum_{\frac{u}{\ln x} < k < \frac{(1+\varepsilon)u}{\ln x}} \frac{2}{k} e^{\frac{u-1}{k} - 1} = \sum_{v=1}^{\varepsilon \ln x} \sum_{t = \frac{u}{\ln x} + v \frac{u}{\ln^2 x}}^{\frac{u}{\ln x} + (v+1)\frac{u}{\ln^2 x}} \frac{2+\Theta}{t} e^{\frac{u-1}{t} - 1}.$$

Имеем

$$e^{\frac{u-1}{k+\frac{u}{\ln^2 x}}} = e^{\frac{u-1}{k}} e^{-\left(\frac{u-1}{k} - \frac{u-1}{k+\frac{u}{\ln^2 x}}\right)} < e^{\frac{u-1}{k}} e^{-(u-1)\frac{\frac{u}{\ln^2 x}}{(1+\varepsilon)^2 \frac{u^2}{\ln^2 x}}} < e^{\frac{u-1}{k}} e^{-\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}.$$

Имеем $\frac{u-1}{k} - 1 < \ln n$, $n \ln n < x$; отсюда

$$e^{\frac{u-1}{k}-1} < \frac{x}{\ln x - \ln\ln x} < \frac{x}{\ln x}(1+\varepsilon).$$

Отсюда

$$\sum_{v=0}^{\alpha \ln x} \sum_{t=\frac{u}{\ln x}+v\frac{u}{\ln^2 x}}^{\frac{u}{\ln x}+(v+1)\frac{u}{\ln^2 x}} \frac{2+\Theta}{t} e^{\frac{u-1}{t}-1} < \max \frac{2+\Theta}{k} \max e^{\frac{u-1}{k}-1} \sum_{v=1}^{\infty} e^{-\frac{v}{(1+\varepsilon)^2}} \frac{u}{\ln^2 x} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2+\Theta)(1+\varepsilon)}{\frac{u}{\ln x}} \frac{x}{\ln x} \frac{u}{\ln^2 x} \frac{1}{1-\frac{1}{e^{\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}}} = \frac{(2+\Theta)\, e^{\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}(1+\varepsilon)}{e^{\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}}-1} \frac{x}{\ln^2 x} < 3{,}2\frac{x}{\ln^2 x}$$

(при достаточно малых $\varepsilon$ и $\Theta$).

Рассмотрим последовательность

$$p_1 = 1\ln 1 = 0, \quad p_2 = 2\ln 2, \ \ldots, \quad p_k = k\ln k, \ \ldots$$

и выберем из нее ряд членов $q_1 = k_1 \ln k_1$ порядка $\ln^3 x$, т. е. $k_1 = \left[\frac{\ln^3 x}{3\ln\ln x}\right]$, и аналогично $q_2 = k_2 \ln k_2 \sim 2\ln^3 x$, $q_3 = k_3 \ln k_3 \sim 3\ln^3 x$, ... и т. д., до $q_{\alpha \ln x} = k_{\alpha\ln x} \ln k_{\alpha \ln x} \sim \alpha \ln^4 x$.

Образуем таблицу

$$\begin{array}{llll}
p_1, & p_2, & \ldots, & p_t \\
p_1+q_1, & p_2+q_1, & \ldots, & p_t+q_1 \\
p_1+q_2, & p_2+q_2, & \ldots, & p_t+q_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
p_1+q_{\alpha\ln x}, & p_2+q_{\alpha \ln x}, & \ldots, & p_t+q_{\alpha\ln x},
\end{array}$$

где $p_t \leqslant x < p_{t+1}$. Число различных членов этой таблицы не менее чем

$$\frac{x}{\ln x} + \left[\frac{x}{\ln x} - A(q_1, x)\right] + \left[\frac{x}{\ln x} - A(q_2, x) - A(q_2 - q_1, x)\right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{x}{\ln x} - A(q_j, x) - \ldots - A(q_j - q_{j-1}, x)\right] + \ldots$$

В данном случае все разности $q_i - q_j$ заключены между $\ln^3 x$ и $\ln^4 x$. Поэтому все $A(q_i - q_j, x) < 3{,}2\frac{x}{\ln^2 x}$, и число различных членов таблицы не менее чем

$$\alpha\frac{x}{\ln x}\ln x - 3{,}2\, x \frac{x}{\ln x}\sum_{n=1}^{\alpha \ln x} n = \alpha x - 3{,}2\frac{\alpha^2 \ln^2 x}{2\ln^2 x} x = x(\alpha - 1{,}6\alpha^2).$$

Полагая $\alpha = \frac{1}{3,2}$, имеем $x(\alpha - 1,6\alpha^2) = \frac{x}{6,4}$. Таким образом, если расположить таблицу в ряд по возрастающим величинам, то число членов этого ряда до $x$ (при достаточно большом $x$) не менее $\frac{x}{6,4}$. Плотность этой последовательности не менее $\frac{1}{6,4}$. Отсюда следует возможность разложения всякого числа с точностью до ограниченной величины на сумму 13 членов ряда сумм $p_i + p_j$, а следовательно, 26 членов ряда $p_1 = 0$, $p_2 = 2\ln 2, \ldots, p_n = n \ln n, \ldots$

Для доказательства теоремы достаточно представить $\ln x$ в виде суммы

$$n_1 \ln n_1 + n_2 \ln n_2 + \ldots + n_{26} \ln n_{26} + \ln x_0,$$

где

$$0 \leqslant \ln x_0 < \ln A \quad (A \text{ — абсолютная константа}).$$

Отсюда $x = x_0 n_1^{n_1} n_2^{n_2} \ldots n_{26}^{n_{26}}$.

Точно так же можно представить всякое число $x > 0$ в виде

$$x = x_0 n_1!\ n_2! \ldots n_{26}!.$$

Вторая основная лемма. *Пусть дана последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$*

*Обозначим через $f_x(t)$ сумму*

$$e^{2\pi i n_1 t} + e^{2\pi i n_2 t} + \ldots + e^{2\pi i n_k t},$$

*где $n_k \leqslant x < n_{k+1}$.*

*Если при любом $x > 0$*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_x(t)|^{2u}\, dt < C \frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{x}, \tag{1}$$

*где $C$ — постоянная, не зависящая от $x$, а $N(z)$ — число членов ряда $n_1, n_2, \ldots$ не превосходящих $z$, то всякое число $x > 0$ разлагается на сумму ограниченного (не зависящего от $x$) числа членов ряда $n_1, n_2, \ldots$ с точностью до ограниченного ($< A$) по величине слагаемого ($A$ не зависит от $x$).*

Доказательство.

$$f_x(t) = \sum_{j=1}^{k} \cos 2\pi n_j t + i \sum_{j=1}^{k} \sin 2\pi n_j t,$$

$$[f_x(t)]^u = A_0 + A_1 e^{2\pi i t} + A_2 e^{2\pi i \cdot 2t} + \ldots + A_{un_k} e^{2\pi i u n_k t},$$

где $A_j$ есть число разложений $j$ на $u$ слагаемых, членов ряда $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, не превосходящих $x$.

Имеем

$$|f_x(t)|^{2u} = \Big(\sum_{j=1}^{un_k} A_j \cos 2\pi j t\Big)^2 + \Big(\sum_{j=1}^{un_k} A_j \sin 2\pi j t\Big)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2 + \sum_{j=1}^{un_k} \sum_{k=1}^{un_k} 2A_j A_k \cos 2\pi t (j - k),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_x(t)|^{2u}\, dt = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2.$$

Но

$$\sum_{j=1}^{x} A_j^2 \leqslant \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2 < C\,\frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{x}$$

(по условию леммы). Далее,

$$\sum_{j=1}^{x} A_j \geqslant \sum_{j=1}^{x} A_j^1 = \left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{u},$$

где $A_j^1$ суть числа разложений числа $j$ на сумму $u$ членов ряда $n_1, n_2, \ldots$, не превосходящих $\frac{x}{u}$.

Обозначим через $\mu(x)$ число $A_j$, не равных нулю, где $j \leqslant x$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{x} A_j < \sqrt{\mu(x)}\sqrt{\sum_{j=1}^{x} A_j^2},$$

т. е.

$$\left(\sum_{j=1}^{x} A_j\right)^2 < \mu(x)\sum_{j=1}^{x} A_j^2,$$

откуда

$$\mu(x) > \frac{\left(\sum_{j=1}^{x} A_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{x} A_j^2} > \frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{C\,\frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{x}} = \frac{x}{C},$$

т. е. $\mu(x) > \frac{x}{C}$ при любом $x$.

Мы получили, что число членов ряда, образованного из $u$-кратных сумм членов ряда $n_1, n_2, \ldots$, не превосходящих $x$, превосходит $\frac{x}{C}$ (при любом $x$). Следовательно, этот последний ряд имеет положительную плотность $\geqslant \frac{1}{C}$.

Справедливость основной второй леммы вытекает, таким образом, из основной первой леммы.

Следствие. Условие (1) в формулировке основной второй леммы можно заменить условием

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f_x\left(\frac{a}{x}\right)\right|^{2u} < C\,\frac{N^{2u}\left(\frac{x}{u}\right)}{x}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f_x\left(\frac{a}{x}\right)\right|^{2u} = \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2 + 2\sum_{j=1}^{un_k}\sum_{k=1}^{un_k} A_k A_j\left(\sum_{a=0}^{x-1}\cos 2\pi\frac{a}{x}(j-k)\right).$$

Но

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\cos 2\pi\frac{a}{x}(j-k) = \begin{cases}1\\0\end{cases},$$

смотря по тому, делится ли $j-k$ на $x$ или не делится.

Мы имеем поэтому

$$\frac{1}{x}\sum_{a=0}^{x-1}\left|f_x\left(\frac{a}{x}\right)\right|^{2u} > \sum_{j=1}^{un_k} A_j^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_x(t)|^{2u}\,dt.$$

Лемма v. d. Corput'а. *Пусть $g(v)$ — функция вещественного переменного $v$.*

*Если* $\Theta \leqslant g(v+1)-g(v) \leqslant \pi$ и $g(v+1)-2g(v)+g(v-1)>0$, *то*

$$\left|\sum_{v=1}^{n} e^{g(v)i}\right| < \frac{1}{\Theta}+C \quad (C \text{ — абсолютная константа}).$$

Доказательство.

$$e^{g(v)i} = \frac{e^{g(v+1)i}-e^{g(v)i}}{[g(v+1)-g(v)]i}\cdot\frac{[g(v+1)-g(v)]\,i}{e^{[g(v+1)-g(v)]i}-1}.$$

Функция $\frac{z}{e^z-1}$ голоморфна внутри круга радиуса $2\pi$. Последний множитель разлагается внутри круга радиуса $2\pi$ в сходящийся степенной ряд по степеням $(v+1)-g(v)]\,i$, т. е.

$$e^{g(v)i} = \frac{e^{g(v+1)i}-e^{g(v)i}}{[g(v+1)-g(v)]i}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\{i\,[g(v+1)-g(v)]\}^k =$$

$$= \frac{e^{g(v+1)i}-e^{g(v)i}}{i[g(v+1)-g(v)]} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(e^{g(v+1)i}-e^{g(v)i}\right)[g(v+1)-g(v)]^{k-1}i^{k-1}.$$

Согласно второй теореме о среднем, ввиду неравенств

$$\frac{1}{g(v+2)-g(v+1)} - \frac{1}{g(v+1)-g(v)} = \frac{2g(v+1)-g(v)-g(v+2)}{[g(v+2)-g(v+1)]\,[g(v+1)-g(v)]} < 0,$$

$$[g(v+2)-g(v+1)]^k - [g(v+1)-g(v)]^k > 0,$$

имеем

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\frac{e^{ig(v+1)}-e^{ig(v)}}{i\,[g(v+1)-g(v)]}\right| < \max\frac{1}{g(v+1)-g(v)} = \frac{1}{\Theta},$$

$$\left|\sum_{v=1}^{n}\left(e^{ig(v+1)}-e^{ig(v)}\right)[g(v+1)-g(v)]^{k-1}i^{k-1}\right| <$$

$$< \max|g(v+1)-g(v)|^{k-1} < \pi^{k-1}.$$

Отсюда

$$\sum_{v=1}^{n} e^{g(v)i} < \frac{1}{\Theta} + \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\,\pi^{k-1} = \frac{1}{\Theta}+C,$$

так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|\,z^k$ сходится внутри круга радиуса $2\pi$.

Лемма Weyl'я. *Положим $p(n)=\gamma n^p+\alpha_1 n^{p-1}+\ldots$ есть полином $p$-й степени по $n$ со старшим коэфициентом $\gamma$. Тогда*

$$\left|\sum(n,p,\gamma)\right|^{2^{p-1}} = \left|e^{p(1)2\pi i}+e^{p(2)2\pi i}+\ldots+e^{p(n)2\pi i}\right|^{2^{p-1}} <$$

$$< 4^{2^{p-1}}\left(n^{2^{p-1}} + n^{2^{p-1}-p}\sum_{1\leqslant h_i\leqslant n}\frac{1}{\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\gamma\}}\right),$$

*где символ* $\frac{1}{\{\alpha\}}$ *означает наименьшую из величин: $n$ или обратная величина разности между $\alpha$ и ближайшим целым числом.*

Доказательство. При $p=1$ имеем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} e^{p(i)2\pi i}\right| = \left|\frac{e^{\gamma(n+1)2\pi i}-1}{e^{\gamma 2\pi i}-1}\right| < \left|\frac{1}{\sin\gamma\pi}\right| < \frac{1}{\{\gamma\}},$$

т. е. для $p=1$ лемма верна.

Пусть она проверена для полинома $(p-1)$-й степени.

Применяя теорему Шварца, получаем

$$\left|\sum\nolimits^{2}(n, p, \gamma)\right|^{2^{p-2}} = \left|\sum_{j, k=1, \ldots, n} e^{2\pi i[p(j)-p(k)]}\right|^{2^{p-2}} =$$

$$= \left|\sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i[p\gamma k^{p-1}h+\ldots]}\right|^{2^{p-2}} <$$

$$< \left(\sum_{h=-n+1}^{n-1}\left|\sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i(p\gamma hk^{p-1}+\ldots)}\right|\right)^{2^{p-2}} <$$

$$< (\sqrt{2n})^{2^{p-2}}\left(\sqrt{\sum_{h=-n+1}^{n-1}\left|\sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i(p\gamma hk^{p-1}+\ldots)}\right|^{2}}\right)^{2^{p-2}} <$$

$$< (2n)^{2^{p-3}}(2n)^{2^{p-2}}\left(\sum_{h=-n+1}^{n-1}\left|\sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i(p\gamma hk^{p-1}+\ldots)}\right|^{4}\right)^{2^{p-3}} < \ldots$$

Продолжая применять теорему Шварца, получаем

$$\left|\sum(n,p,\gamma)\right|^{2^{p-1}} < (2n)^{2^{p-3}+2^{p-4}+\ldots+1}\sum_{h=-n+1}^{n-1}\left|\sum_{k=1}^{n-h} e^{2\pi i(p\gamma hk^{p-1}+\ldots)}\right|^{2^{p-2}}.$$

Предположив лемму доказанной для полинома $(p-1)$-й степени, получаем

$$\left|\sum(n, p, \gamma)\right|^{2^{p-1}} <$$

$$< (2n)^{2^{p-2}-1}\left\{2n4^{2^{p-2}}n^{2^{p-2}-1} + n^{2^{p-2}-p+1}\sum_{-n\leqslant h_i<n}\frac{1}{\{p\gamma h_{p-1}h_1\ldots h_{p-2}(p-1)!\}}\right\} <$$

$$< 2^{2^{p-2}-1+1}4^{2^{p-2}2^{p}}\left\{n^{2^{p-1}-1} + n^{2^{p-1}-p}\sum_{-n\leqslant h_i<n}\frac{1}{\{p!\,\gamma h_1\ldots h_{p-1}\}}\right\} <$$

$$< 4^{2^{p-1}}\left\{n^{2^{p-1}-1} + n^{2^{p-1}-p}\sum_{1\leqslant h_i\leqslant n}\frac{1}{\{p!\,\gamma h_1\ldots h_{p-1}\}}\right\}.$$

## Применение к доказательству обобщенной теоремы Варинга.

Теорема. *Пусть последовательность натуральных чисел $n_1$, $n_2$, $n_3$, ... имеет плотность, бóльшую $\alpha > 0$.*

*Всякое число $x > 0$ можно разложить с точностью до ограниченного слагаемого на сумму ограниченного числа $p$-х степеней членов этого ряда.*

Доказательство этой теоремы достигается соединением метода И. М. Виноградова с применением второй основной леммы настоящей работы.

Оценка суммы $\sum\limits_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}$.

1-й случай: $a < \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$. Положим $g(n) = \frac{2\pi a}{x} n^p$,

$$g(n+1) - g(n) = \frac{2\pi a}{x}\left[(n+1)^p - n^p\right] < \frac{2\pi a p}{x}(n+1)^{p-1} < \pi$$

(если $\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p-1} < 1$). Разобьем $\sum\limits_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}$ на две части:

$$\sum{}' = \sum_{1}^{x^{\frac{1}{p}}/a^{\frac{1}{p}}} \quad \text{и} \quad \sum{}'' = \sum_{x^{\frac{1}{p}}/a^{\frac{1}{p}}}^{x^{\frac{1}{p}}}.$$

Имеем $\sum{}' < \frac{x^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}}$, а во второй сумме

$$g(n+1) - g(n) > \frac{2\pi a p}{x} \frac{x^{\frac{p-1}{p}}}{a^{\frac{p-1}{p}}} = 2\pi p \frac{a^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

В силу леммы v. d. Corput'a

$$\sum{}'' < \frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p\pi a^{\frac{1}{p}}} + C,$$

и вся сумма

$$\sum_{1}^{x^{\frac{1}{p}}} < \frac{2x^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}}.$$

2-й случай: $a \geqslant \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$. Всегда можно выбрать дробь $\frac{q}{y}$ ($q$ и $y$ взаимно простые) так, чтобы $\frac{a}{x} - \frac{q}{y} = \frac{a'}{xy}$, где $|a'| < \frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}$, причем

$$y < 2p!\, x^{\frac{p-1}{p}}.$$

1-я оценка (при $y \leqslant x^{\frac{1}{2p}}$).

Разобьем сумму $\sum = \sum\limits_{u=1}^{x^{\frac{1}{p}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}$ на ряд сумм:

$$\sum = \sum_{\rho=0}^{y-1} \sum{}_{\rho} = \sum_{\rho=0}^{y-1} \sum_{u'=0}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{y}} e^{2\pi i \frac{a}{x}(\rho+u'y)^p}.$$

Рассмотрим одну из этих сумм $\sum_\rho$:

$$\sum_\rho = \sum_{u'=0}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{y}} e^{2\pi i \frac{a}{x}(\rho+u'y)^p} = \sum_{u'=0}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{y}} e^{2\pi i\left(\frac{q}{y}+\frac{a'}{xy}\right)(\rho+u'y)^p} =$$

$$= e^{2\pi i\left(\frac{q}{y}+\frac{a'}{xy}\right)\rho^p} \sum_{u'=0}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{y}} e^{2\pi i \frac{a'}{x}(y^{p-1}u'^{p-1}+\ldots)} =$$

$$= e^{2\pi i\left(\frac{q}{y}+\frac{a'}{xy}\right)\rho^p} \sum_{u'=0}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{y}} e^{g(u')i},$$

где

$$g(u') = \frac{(\rho+u'y)^p-\rho^p}{y}\,\frac{2\pi a'}{x}.$$

Имеем

$$g(u'+1)-g(u') < \frac{2\pi a'}{x} y^{p-1}(u'+2)^{p-1}p < \frac{2\pi p a' y^{p-1} x^{\frac{p-1}{p}}}{x y^{p-1}} < \pi.$$

Разобьем $\sum\limits_{u'=0}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{y}} e^{g(u')i}$ на две суммы:

$$\sum_1 = \sum_{u'=0}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{ya'^{\frac{1}{p}}}} \quad \text{и} \quad \sum_2 = \sum_{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{ya'^{\frac{1}{p}}}}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}-\rho}{y}}.$$

Первая сумма меньше чем $\dfrac{x^{\frac{1}{p}}}{ya'^{\frac{1}{p}}}$, во второй сумме

$$g(u+1)-g(u) > \frac{a'}{x}\,2p\pi y^{p-1}u^{p-1} > 2p\pi\,\frac{a'^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{1}{p}}}.$$

По лемме v. d. Corput'a $\sum_2 < \dfrac{x^{\frac{1}{p}}}{pa'^{\frac{1}{p}}} + C$, т. е. вся сумма $\sum = \sum_1 + \sum_2$ меньше $2\dfrac{x^{\frac{1}{p}}}{a'^{\frac{1}{p}}}$. Отсюда следует оценка

$$\left|\sum_{u=1}^{x^{\frac{1}{p}}} e^{2\pi i \frac{a}{p} u^p}\right| < \sum_{\rho=0}^{y-1} \left|\sum_\rho\right| < \frac{2yx^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}}.$$

2-я оценка (при любых $y$).

На основании леммы Weyl'я

$$\left|\sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p}\right|^{2^{p-1}} < 4^{2p-1}\left[x^{\frac{2^{p-1}}{p}} + x^{\frac{2^{p-1}}{p}-1} \sum \frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{a}{x}\right\}}\right].$$

Положим

$$\left|\frac{a}{x}-\frac{q}{y}\right| < \frac{1}{2p!\,x^{\frac{p-1}{p}}}, \quad y < 2p!\,x^{\frac{p-1}{p}},$$

т. е.

$$\frac{a}{x} = \frac{q}{y} + \frac{a'}{xy}, \quad a' < \frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}.$$

Имеем

$$\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{a}{x}\right\}} = \frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y} + \frac{p!\,h_1\ldots h_{p-1}a'}{xy}\right\}} =$$

$$= \frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y} + \frac{\Theta}{y}\right\}} < 2\,\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}\right\}}$$

(здесь $|\Theta| < \frac{1}{2}$).

Оценим

$$\sum_{1 \leqslant h_i \leqslant n} \frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{q}{y}\right\}}.$$

Если $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$ делится на $y$, то $\frac{1}{\{\ \}} = x^{\frac{1}{p}}$. Число таких произведений $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$, которые делятся на $y$, не более $\frac{p!\,x^{\frac{p-1}{p}}\,y^{\varepsilon}}{y} = \frac{p!\,x^{\frac{p-1}{p}}}{y^{1-\varepsilon}}$ ($\varepsilon$ — любое $> 0$). Сумма всех $\frac{1}{\{\ \}}$, распространенных на подобные произведения, не превосходит $\frac{p!\,x}{y^{1-\varepsilon}}$.

Рассмотрим случай, когда $y$ не есть делитель произведения $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$.

Остатки каждого ряда чисел $q(u+1)$, $q(u+2)$, ..., $q(u+y-1)$ по модулю $q$, где $q$ взаимно простое с $y$, а $u$ кратно $y$, суть, отвлекаясь от порядка, $1, 2, \ldots, y-1$.

Соответствующие значения $\frac{1}{\left\{\frac{q}{y}(u+t)\right\}}$ суть, с точностью до порядка, $y$, $\frac{y}{2}, \frac{y}{3}, \ldots, \frac{y}{\left[\frac{y}{2}\right]}, \ldots, \frac{y}{3}, \frac{y}{2}, y$.

Сумма этих значений меньше $2y\ln y$. Сумма соответствующих значений $\frac{1}{\left\{\frac{a}{x}(u+t)\right\}}$ не превосходит удвоенной предыдущей, т. е. $4y\ln y$.

Весь ряд чисел от 1 до $p!\,x^{\frac{p-1}{p}}$ (не считая кратных $y$) может быть разбит на $\left[\frac{p!\,x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\right]$ рядов предыдущего вида и один неполный подобный ряд (от $\left[\frac{p!\,x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\right]y+1$ и до $p!\,x^{\frac{p-1}{p}}$).

С другой стороны, среди произведений $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$, которые все не более $p!\,x^{\frac{p-1}{p}}$, каждое число встречается не более $x^{\varepsilon}$ раз ($\varepsilon$ как угодно мало).

Поэтому вся сумма выражений $\frac{1}{\{\;\;\}}$, соответствующих произведениям $p!\,h_1\ldots h_{p-1}$, не делящимся на $y$, не превосходит

$$\left\{\left[\frac{p!\,x^{\frac{p-1}{p}}}{y}\right]+1\right\}4y\ln y\cdot x^{\varepsilon}<p!\,x^{\frac{p-1}{p}+\varepsilon'}<3p!\,x^{\frac{p-1}{p}+\varepsilon'}$$

(где $\varepsilon'$ любое $>\varepsilon$).

Выберем $\varepsilon'=\frac{1}{2p}$. Получим для $\sum\frac{1}{\{\;\;\}}$ оценку

$$\frac{1}{\left\{p!\,h_1\ldots h_{p-1}\frac{a}{x}\right\}}<x^{1-\frac{1}{2p}}+\frac{p!\,x}{y^{1-\frac{1}{2p}}}.$$

Отсюда получается: при $a>\frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$ и любом $y$, меньшем $p!x^{\frac{p-1}{p}}$,

$$\left(\left|\sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}}e^{2\pi i\frac{a}{x}n^p}\right|\right)^{2^{p-1}}<4^{2^{p-1}}\left\{x^{\frac{2^{p-1}-1}{p}}+x^{\frac{2^{p-1}}{p}-1}\left(\frac{p!x}{y^{1-\frac{1}{2p}}}+x^{1-\frac{1}{2p}}\right)\right\}<$$

$$<4^{2^{p-1}}\left(2x^{\frac{2^{p-1}}{p}-\frac{1}{p}}+\frac{p!x^{\frac{p-1}{p}}}{y^{1-\frac{1}{2p}}}\right).$$

Таким образом получаем следующую сводку оценок:

1. Если $a\geqslant\frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$, то $\sum_a<\frac{2x^{\frac{1}{p}}}{a^{\frac{1}{p}}}$.

2. Если $a>\frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$ и $y\leqslant x^{\frac{1}{2p}}$, то, обозначая соответственную сумму

$$\sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}}e^{2\pi i\frac{a}{x}n^p}=\sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}}e^{2\pi i\left(\frac{q}{y}+\frac{q'}{xy}\right)n^p}$$

через $(a',y)$, имеем

$$|(a',y)|<\min\left\{\frac{2yx^{\frac{1}{p}}}{a'^{\frac{1}{p}}},\quad 5x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p2^p}}+5\frac{x^{\frac{1}{p}}}{y^{\frac{1-\frac{1}{2p}}{2^{p-1}}}}\right\}.$$

Наконец, при $a \geqslant \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$ и $y > x^{\frac{1}{2p}}$ эта сумма меньше выражения

$$5x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p2^p}} + 5\frac{x^{\frac{1}{p}}}{y^{\frac{1-\frac{1}{2p}}{2^{p-1}}}}.$$

Оценим теперь

$$\sum_{a=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} \left(\Sigma_a\right)^u + \sum_{y=1}^{2p!\,x^{\frac{p-1}{p}}} \sum_{a'=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (a', y)^u < x^{\frac{u}{p}} \sum_{a=1}^{\infty} \left(\frac{2}{a^{\frac{1}{p}}}\right)^u + \sum_{y=1}^{2p!\,x^{\frac{p-1}{p}}} \Sigma'_y,$$

где

$$\Sigma'_y = \sum_{a'=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (a', y)^u.$$

Имеем $a > \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$. Если $y > x^{\frac{1-\frac{1}{2p}}{2p}}$, то, на основании последней оценки, $|(a', y)| < 10x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p2^p}}$, так что $|(a', y)|^u$ при $u > p2^p$ меньше чем $\frac{x^{\frac{u}{p}}}{x}$.

Для $y \leqslant x^{1-\frac{1}{2p}}$ и $a > \frac{x^{\frac{1}{p}}}{3p}$

$$|(a', y)| > \min\left[\frac{10x^{\frac{1}{p}}}{y^{\frac{1-\frac{1}{2p}}{2^{p-1}}}},\ \frac{2x^{\frac{1}{p}}y}{a'^{\frac{1}{p}}}\right].$$

Разобьем $\sum_{a'=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (a', y)^u$ на части, определяемые неравенствами:

1) $5a'^{\frac{1}{p}} \leqslant y^{2+\frac{1-\frac{1}{2p}}{2^{p-1}}}$, т. е. $a' \leqslant \frac{1}{5^p} y^{2p+\frac{2p-1}{2^{p-1}}}$,

и

2) $a' > \frac{1}{5^p} y^{2p+\frac{2p-1}{2^{p-1}}}$.

В первой части суммы $|(a', y)| < \frac{10x^{\frac{1}{p}}}{y^{\frac{1-\frac{1}{2p}}{2^{p-1}}}}$, во второй части

$$|(a', y)| < \frac{2x^{\frac{1}{p}}y}{a'^{\frac{1}{p}}}.$$

Сумма членов первой части меньше чем $\dfrac{x^{\frac{u}{p}} y^{2p+\frac{2p-1}{2^{p-1}}}}{y^{\frac{2p-1}{p2^{p-1}}u}}$.

При $\dfrac{2p-1}{p2^{p-1}}u > 2p + \dfrac{2p-1}{2^{p-1}} + 2$, например при $u > 3p2^p$, она меньше чем $\dfrac{x^{\frac{u}{p}}}{y^2}$.

Сумма членов второй части меньше чем $x^{\frac{u}{p}} \sum \dfrac{(2y)^u}{a'^{\frac{u}{p}}}$, где сумма распространена на все значения $a'$ между $\dfrac{1}{5p} y^{2p+\frac{2p-1}{2^{p-1}}}$ и $+\infty$. Эта сумма меньше чем

$$x^{\frac{u}{p}} \int\limits_{\frac{1}{5p} y^{2p+\frac{2p-1}{2^{p-1}}}}^{\infty} \frac{(2y)^u}{a'^{\frac{u}{p}}}\, da' < \frac{K(u, p)\, x^{\frac{u}{p}}}{y^{u-1+\frac{(p-1)u}{2^{p-1}}}}.$$

При $u > 3$ она меньше чем $\dfrac{K(u, p)\, x^{\frac{u}{p}}}{y^2}$ (где $K(u, p)$ — постоянная, зависящая только от $u$ и $p$).

$$\sum_{a=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (\Sigma_a) + \sum_{y=1}^{2p!\,x^{\frac{p-1}{p}}} \sum_{a'=1}^{\frac{x^{\frac{1}{p}}}{2p!}} (a', y)^u <$$

$$< 2^u x^{\frac{u}{p}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2} + K(u, p)\, x^{\frac{u}{p}} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y^2} < K'(u, p)\, x^{\frac{u}{p}}$$

(при $u > 3p2^p$).

Отсюда получается следующая оценка основной суммы:

$$\frac{1}{x} \left| \sum_{a=0}^{x-1} \left( \sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} u^p} \right)^u \right| < \frac{x^{\frac{u}{p}}}{x} K'(u, p)$$

(при $u \geqslant 3p2^p$).

Доказательство обобщенной теоремы Варинга.

Рассмотрим последовательность чисел $n_1, n_2, \ldots$ плотности $\geqslant \alpha > 0$. Число членов этой последовательности, не превосходящих $x$, не менее чем $\frac{\alpha}{2} x$ (начиная с достаточно большого $x$).

Число членов соответствующего ряда степеней, не превосходящих $x$, начиная с достаточно большого $x$, не менее чем $\frac{a}{2} x^{\frac{1}{p}}$.

Обозначая последнее число через $N(x)$, имеем $N(x) > \frac{a}{2} x^{\frac{1}{p}}$.

Обозначая через $A_j$ число разложений $j$ на сумму $p$-х степеней натуральных чисел, а через $A_j'$ — число разложений $j$ на сумму членов ряда $n_1^p, n_2^p, \ldots$, имеем

$$\sum_{j=1}^{x} A_j'^2 < \sum_{j=1}^{x} A_j^2 < \frac{1}{x} \sum_{a=0}^{x-1} \left| \sum_{n=1}^{x^{\frac{1}{p}}} e^{2\pi i \frac{a}{x} n^p} \right|^{2u} < K'(u, p) \frac{x^{\frac{2u}{p}}}{x} < K_2(u, p) \frac{\left[N\left(\frac{x}{u}\right)\right]^{2u}}{x}.$$

Таким образом условия второй основной леммы выполнены.
Это доказывает теорему.