

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.4

КОНЦЕНТРАЦИЯ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ С ДВУХМАСШТАБНОЙ ГРАДИЕНТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ И РАЗРЕЗАМИ

Ю. М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, Ю. А. ЧИГАРЕВА⁺

УО «Белорусский национальный технический университет», пр. Независимости, 65, 220013 г. Минск, Беларусь.

Рассмотрена пространственная задача о неограниченной пластине с двумя прямолинейными полубесконечными разрезами в одной и той же плоскости, находящейся под действием тепловых потоков. Показано, что в пластине из ортотропного микрослоистого материала под действием тепловых потоков возникают поля напряжений, интенсивность которых у концов трещин возрастает. Установлено, что скачок градиентов коэффициентов упругости, теплопроводности, теплоемкости различным образом влияет на зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от расстояния разрезов от свободной границы и расстояния между разрезами.

Введение

Рассматривается пространственная задача о неограниченной пластине с двумя прямолинейными полубесконечными разрезами в одной и той же плоскости, находящейся под действием тепловых потоков, силовое воздействие отсутствует. Материал пластины ортотропный, слоистый, причем характер изменения неоднородности по толщине пластины в общем случае имеет два масштаба. Макромасштаб характеризуется расстоянием разрезов от граничных плоскостей свободных от силовых нагрузок и равному толщинам слоев, жестко скрепленных в области перемычки между разрезами. Микромасштаб определяется зависимостью коэффициентов упругости, теплопроводности, теплоемкости от пространственных координат по толщине макрослоев, причем аналитическая зависимость для каждого из макрослоев своя, при переходе через границу макрослоев скачок испытывают только градиенты (производные) теплофизических и упругих коэффициентов, а сами коэффициенты непрерывны. Таким образом, в общем случае задача о расслоении 2-х макропластин осложняется наличием микroneоднородности и ее влиянием на механическое состояние пластин и прогноз предельного состояния.

Рассмотрено решение задачи для случаев, когда возможно перейти от уравнений в частных производных с переменными коэффициентами к

уравнениям с постоянными коэффициентами, для которых оказывается применимым метод разделения переменных в сочетании с методом интегральных преобразований. Для решения плоской задачи о 2-х слойной микroneоднородной полосе с разрезами применяется метод интеграла Коши и методы приближенного решения интегральных уравнений. Задачи теплопроводности и термоупругости решаются последовательно и по одинаковой схеме. Вычисляются коэффициенты концентрации напряжений в окрестности кончиков трещин и численно исследовано их поведение в зависимости от расстояния между концами разрезов и толщины макрослоев при различных соотношениях между геометрическими и физико-механическими параметрами слоев.

Вычислению коэффициентов интенсивности термических напряжений посвящено достаточно много работ, отметим некоторые из них, в которых можно найти соответствующую библиографию [1, 2]. Учет анизотропии оказывает существенное влияние на распределение напряжений в пластинах с разрезами [3, 4]. Учет неоднородности на макроуровне обычно проводится на основе моделей кусочно-однородных пластин и оболочек [5], а на микроуровне с помощью функциональных зависимостей физико-механических параметров среды от пространственных координат [6]. В последние годы интерес к неоднородным средам

⁺ Автор, с которым следует вести переписку.

градиентного типа стимулируется проблемами, возникающими в практике использования различных композитных материалов в машинах, технологических процессах, связанных с температурным воздействием на них. Многопараметричность проблемы, обусловленная учетом анизотропии, неоднородности сильно усложняет задачу, но позволяет ставить задачи управления процессами деформирования и разрушения. Исследованию влияния температуры на микрослоистые пластины с трещинами посвящены работы [7–11].

1. Температурное поле в микрослоистой пластине

Рассмотрим пластину толщиной $H = H_1 + H_2$ [$-H_2 \leq y \leq H_1$], размеры которой по z и $x - \infty < x, z < \infty$ неограниченны. Пластина подвергается вдоль оси y сверху и снизу действию тепловых потоков так, что плоскости $y = H_1$, $y = -H_2$ перпендикулярны вектору потока.

Положим, что внешнее температурное поле не изменяется вдоль координаты z так, что можно считать что внутреннее поле температуры и напряжений также не изменяется вдоль координаты z . На глубине H_1 в пластине имеются два коллинеарных бесконечных разреза вдоль оси z и полубесконечных вдоль оси x . Таким образом, между верхней частью пластины $0 \leq y \leq H_1$ и нижней $H_2 \leq y \leq 0$ имеется перемычка $l < x < \infty$, $-\infty < x < -l$, $-\infty < z < \infty$. На рис. 1 в плоскости Oxy изображена схема задачи.

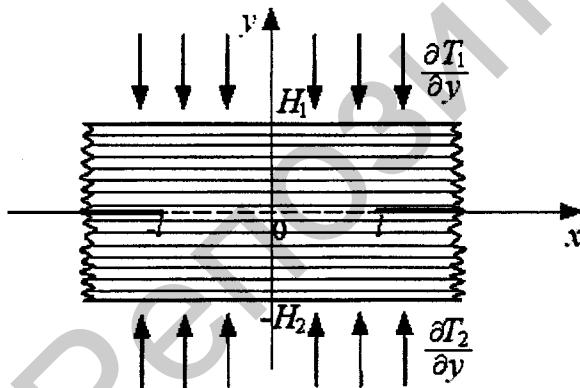


Рис. 1. Микронеоднородный слой под действием тепловых потоков, H_i ($i = 1, 2$) толщины слоев; l – расстояние между концами разрезов в плоскости Oxy ($y = 0$)

Материал пластины представляет собой микрослоистый, макроскопически 2-х слойный композит такой, что все материальные коэффициенты являются функциями только y , т.е. пластина является микрослоистой по толщине, причем характер неоднородности может меняться при переходе через плоскость $y = 0$ и задача является плоской в плоскости Oxy . Верхний слой толщины H_1 жестко скреплен с нижним слоем толщины H_2 по плоскости $y = 0$; $l \leq x \leq l$. Уравнения, описывающие ста-

ционарные температурные поля $T^{(\tau)}(x, y)$ в среде имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\Lambda_{11}^{(\tau)}(y) \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} \right] + \Lambda_{22}^{(\tau)}(y) \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} = 0, \tau = 1, 2, \quad (1.1)$$

где $\tau = 1$ соответствует верхнему слою; $\tau = 2$ – нижнему.

В уравнении (1.1) $\Lambda_{11}^{(\tau)}(y)$, $\Lambda_{22}^{(\tau)}(y)$ переменные коэффициенты теплопроводности и для произвольных $\Lambda_{11}^{(\tau)}(y)$, $\Lambda_{22}^{(\tau)}(y)$ уравнение (1.1) не может быть решено в общем виде. Запишем $\Lambda_{ij}^{(\tau)}(y)$ в виде

$$\Lambda_{ij}^{(\tau)} = \Lambda_{ij}^{0(\tau)} f_{(i)}(y), \quad (1.2)$$

где $\Lambda_{ij}^{0(\tau)}$ – константы.

Тогда уравнение (1.1) представится следующим образом

$$\frac{d \ln f_{(i)}}{dy} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial y^2} + \frac{\Lambda_{22}^{0(\tau)}}{\Lambda_{11}^{0(\tau)}} \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} = 0, (\tau = 1, 2). \quad (1.3)$$

Рассмотрим случай неоднородности такой, что уравнения (1.3) являются уравнениями с постоянным коэффициентом при $\frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y}$, тогда $f_{(i)}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d \ln f_{(i)}}{dy} = c_{(i)}. \quad (1.4)$$

Характер изменения $f_{(i)}(y)$ по глубине зависит от выбора условий для $f_{(i)}(y)$ при $y = H_1$, $y = -H_2$.

Пусть $H_1 = H_2$, положим $f_{(1)}(y) = f_{(2)}(y)$, т.е. характер микрослоистости при $y = 0$ меняется непрерывно и пусть

$$1. f(y) = f(-y), f(H_1) = f(-H_1) = 1$$

$$f(0) = f(H_1)/e = 1/e = e^{-1}. \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.4) запишем в виде

$$\ln f = cy + c_1. \quad (1.6)$$

Из условий (1.5) и (1.6) получим

$$\begin{cases} \ln f(+H_1) = 0 = c|H_1| + c_1, \\ \ln f(0) = -1 = c_1. \end{cases} \quad (1.7)$$

Из (1.7) находим

$$c_1 = -1, c = |H_1|^{-1}. \quad (1.8)$$

Подставляя (1.6), (1.7), (1.8) в (1.2), получим зависимость Λ_{ij} от y

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}^0 \exp\left(y \|H\|^{-1} - 1\right). \quad (1.9)$$

2. Рассмотрим случай, когда в (1.5)

$$f(0) = e, \quad (1.10)$$

тогда получим

$$\begin{aligned} \ln f(+H_1) &= 0 = c|H_1| + c_1, \\ \ln f(0) &= 1 = c_1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.11) имеем

$$c_1 = 1, \quad c = -|H_1|^{-1}. \quad (1.12)$$

В этом случае неоднородность по толщине пластины меняется согласно закону

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}^0 \exp\left(-\frac{|y|}{|H_1|} + 1\right). \quad (1.13)$$

3. Рассмотрим случай, когда неоднородность по толщине пластины меняется несимметрично и разрезы также расположены несимметрично относительно свободных границ.

Рассмотрим (1.4), при условиях на границах H_1 и $-H_2$: $f(H_1) = 1$, $f(-H_2) = e^{-1}$

$$\begin{cases} \ln f(H_1) = 0 = cH_1 + c_1, \\ \ln f(-H_2) = -1 = -cH_2 + c_1. \end{cases} \quad (1.14)$$

Из (1.9) следует

$$c = (H_1 + H_2)^{-1}, \quad c_1 = -\frac{H_1}{H_1 + H_2}. \quad (1.15)$$

Изменение неоднородности по глубине пластины описывается функций

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}^0 \exp\left(\frac{y - H_1}{H_1 + H_2}\right). \quad (1.16)$$

4. Еще один тип распределения неоднородности получим задавая условия на границах в виде: $f(H_1) = 1$, $f(-H_2) = e$.

$$\begin{cases} \ln f(H_1) = 0 = cH_1 + c_1, \\ \ln f(-H_2) = 1 = -cH_2 + c_1. \end{cases} \quad (1.17)$$

Тогда находим

$$c = -(H_1 + H_2)^{-1}, \quad c_1 = \frac{H_1}{H_1 + H_2}.$$

Распределение неоднородности описывается функцией

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}^0 \exp\left(-\frac{y - H_1}{H_1 + H_2}\right). \quad (1.18)$$

Наиболее общий вид экспоненциальной зависимости можно представить в виде

$$\Lambda_{ij}^{(\tau)}(y) = \Lambda_{ij}^{(0)(\tau)} \exp(\delta^{(\tau)} y / l), \quad (1.19)$$

где учтены микрослоистость, ортотропность, макроскопическая двухслойность. Разрезы моделируют расслоение двух пластин из разных композиционных микрослоистых материалов.

Таким образом на основании уравнения (1.4) можно рассмотреть класс микрослоистых сред, описываемых функциями экспоненциального типа, причем, для всех этих типов функций уравнение (1.3) является уравнением с постоянными коэффициентами, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} + k_0^{(\tau)} \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{(\tau)}}{\partial y^2} &= 0, \\ k_0^{(\tau)} &= \frac{\Lambda_{22}^{(0)(\tau)}}{\Lambda_{11}^{(0)(\tau)}}, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, \quad \tau = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

где константа $c_{(\alpha)}^{(\tau)}$ меняется в зависимости от α -типа неоднородности в нижнем и верхнем слоях и в зависимости от $\tau = 1, 2$ при переходе от верхнего слоя к нижнему слою.

Решение уравнения теплопроводности (1.20), исходя из симметрии задачи, будем искать в виде

$$T^{(\tau)}(x, y) = T_{(\tau)}^{(0)}(y) + T_{(\tau)}^{(1)}(x, y), \quad \tau = 1, 2. \quad (1.21)$$

где $T_{(\tau)}^{(0)}(y)$ – решения задач теплопроводности для пластины без разрезов без расслоения с граничными условиями, заданными на плоскостях $y = H_1$, $y = -H_2$, не зависящими от координаты x , $T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)$ – решения задач теплопроводности при нулевых граничных условиях при $y = H_1$, $y = -H_2$ и краевыми условиями на разрезах, полученными из решения задачи для $T_{(\tau)}^{(0)}(y)$.

Подставляя (1.21) в (1.20) и разделяя уравнения для $T_{(\tau)}^{(0)}$, $T_{(\tau)}^{(1)}$, получим

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{dT_{(\tau)}^{(0)}}{dy} + k_0^{(\tau)} \frac{d^2 T_{(\tau)}^{(0)}}{dy^2} = 0. \quad (1.22)$$

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \frac{\partial T_{(\tau)}^{(1)}}{\partial y} + k_0^{(\tau)} \frac{\partial^2 T_{(\tau)}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{(\tau)}^{(1)}}{\partial y^2} = 0. \quad (1.23)$$

Уравнение (1.22) запишем в виде

$$T_{y(\tau)}^{(0)} = \theta^{(\tau)}(y), \quad \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} \theta^{(\tau)}(y) + \theta^{(\tau)}(y) = 0. \quad (1.24)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \theta^{(\tau)}(y) &= e^{-\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} y + a^{(\tau)}} = T_{(\tau)}^{(0)}(y), \\ T_{(\tau)}^{(0)}(y) &= b^{(\tau)} - \frac{e^{a^{(\tau)}}}{c_{(\alpha)}^{(\tau)}} e^{-\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} y}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

В (1.25) константы $a^{(\tau)}$, $b^{(\tau)}$ должны быть определены из граничных условий при $y = H_1$, $y = -H_2$.

Рассмотрим теперь уравнения (1.23), которые могут быть решены различными способами, однако в данном случае необходимо учитывать, что граничные условия формулируются на разрезах. Кроме того, в случае несвязной термоупругой задачи необходимо в дальнейшем получить также решение упругой краевой задачи для напряжений, поэтому используем для решения метод интегральных преобразований, который в данном случае позволяет применить по x преобразование Фурье. Преобразуя (1.23) по x , находим

$$\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)} d\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y)}{l dy} - k_0^{(\tau)} \lambda^2 \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) + \frac{d^2 \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} = 0, \quad (1.26)$$

$$\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} T^{(1)(\tau)}(x, y) e^{-i\lambda x} dx.$$

Решение уравнения (1.26) можно получить методом характеристического уравнения, которое в данном случае имеет вид

$$p^2 + \frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{l} p - k_0^{(\tau)} \lambda^2 = 0. \quad (1.27)$$

Решение (1.26) запишется в виде

$$\tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) = A^{(\tau)}(\lambda) e^{\lambda_1 y} + B^{(\tau)}(\lambda) e^{\lambda_2 y}, \quad (1.28)$$

$$\lambda_{1,2}^{(\tau)} = -\frac{c_{(\alpha)}^{(\tau)}}{2l} \pm \sqrt{\frac{c_{(\alpha)}^{2(\tau)}}{4l^2} + k_0^{(\tau)} \lambda^2}.$$

В (1.28) произвольные неизвестные $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ должны быть определены из граничных условий. Решение уравнения (1.23) с помощью обратного преобразования Фурье с учетом (1.28) запишется в виде

$$T_{(\tau)}^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}^{(1)(\tau)}(\lambda, y) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A^{(\tau)}(\lambda) e^{p_1^{(\alpha)} y} + B^{(\tau)}(\lambda) e^{p_2^{(\alpha)} y} \right) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (1.29)$$

2. Граничные условия для температурного поля в слое

В двумерной задаче стационарной теплопроводности, которая здесь рассматривается, необходимо сформулировать граничные условия при $y = H_1$, $y = -H_2$ и на разрезах $l \leq x < \infty$, $-\infty < x \leq -l$ [1, 9, 11].

На верхней и нижней плоскостях пластины могут быть сформулированы три типа граничных условий для $T_{(\tau)}^{(0)}(y)$ и, соответственно, нулевые условия для $T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)$. Эти условия можно записать в виде:

$$1. \quad \begin{aligned} T^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} &= T_{H_1}(x), \\ T^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} &= T_{H_2}(x). \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$2. \quad \begin{aligned} \frac{\partial T^{(\tau)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} &= q_{H_1}(x), \\ \frac{\partial T^{(\tau)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} &= q_{H_2}(x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$3. \quad \begin{aligned} \frac{\partial T^{(\tau)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} &= q_{H_1}(x), \\ T^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} &= T_{H_2}(x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

или

$$T^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = T_{H_1}(x), \quad \frac{\partial T^{(\tau)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = q_{H_2}(x).$$

В формулах (2.1)–(2.3) при $y = H_1$ берется $\tau = 1$, при $y = -H_2$ берется $\tau = 2$.

Граничные условия на разрезах формулируются в виде

$$T^+(x, y) \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty} = T^-(x, y) \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T^+(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty} = q_{(\pm)}^{\pm}(x, 0), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial T^+(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty} = \frac{\partial T^-(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty} - \frac{h_i}{\Lambda_{22}^0} [T^+(x, y) - T^-(x, y)] \Big|_{y=0, l \leq |x| < \infty}.$$

Здесь h_i – коэффициент теплопроницаемости трещины $l \leq |x| < \infty$ ($i = 1, 2$), индексы «+», «-» означают предельные значения величин при подходе к разрезам со стороны положительных и отрицательных y или из слоя с индексом $\tau = 1$ и из слоя с индексом $\tau = 2$. В области $|x| \leq l$ перемычки имеет место идеальный тепловой контакт, $q_{(\pm)}^{\pm}$ – потоки тепла на разрезах.

Рассмотрим подробнее условия (2.2). Согласно представлению (1.21) для нулевого приближения имеем

$$\frac{\partial T_{(1)}^{(0)}(y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1} = q_{H_1}, \quad \frac{\partial T_{(2)}^{(0)}(y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2} = q_{H_2}. \quad (2.8)$$

Подставляя (1.25) в (2.8), получим систему двух уравнений для нахождения произвольных констант $a^{(\tau)}$ и $b^{(\tau)}$ ($\tau=1, 2$)

$$\begin{aligned} -\frac{e^{a^{(1)}}}{c_{(\alpha)}^{(1)}} \left(-c_{(\alpha)}^{(1)}\right) e^{-c_{(\alpha)}^{(1)} H_1} &= q_{H_1} \\ -\frac{e^{a^{(2)}}}{c_{(\alpha)}^{(2)}} \left(c_{(\alpha)}^{(2)}\right) e^{c_{(\alpha)}^{(2)} H_2} &= -q_{H_2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Сформулируем граничные условия для первого приближения согласно [1, 9, 11]

$$1. T_{(\tau)}^{(1)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = 0, \quad T_{(\tau)}^{(1)}(x, y) \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = 0. \quad (2.10)$$

$$2. \frac{\partial T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = 0, \quad \frac{\partial T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = 0. \quad (2.11)$$

$$3. \frac{\partial T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = 0, \quad \frac{\partial T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-H_2}^{\tau=2} = 0, \quad (2.12)$$

где $\tau=1$ при $y=H_1$, $\tau=2$ при $y=-H_2$.

Граничные условия на разрезах

$$T^{(1)\pm}(x, 0^\pm) \Big|_{|x|<\infty} = T_{(\pm)}^{(1)\pm}(x) - T^{(0)\pm}(0) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial T^{(1)\pm}(x, 0^\pm)}{\partial y} \Big|_{|x|<\infty} = \Lambda_{22}^0 q_{(\pm)}^{\pm}(x, 0^\pm) - \frac{\partial T^{(0)\pm}(y)}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial T^{(1)*}}{\partial y} \Big|_{y=0^+, |x|<\infty} = \frac{\partial T^{(1)-}}{\partial y} \Big|_{y=0^-, |x|<\infty}. \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=0, |x|<\infty} - \frac{h_i}{\Lambda_{22}^0} \left[T_{(x,y)}^{(1)*} - T_{(x,y)}^{(1)-} \right] = -\frac{\partial T^{(0)}}{\partial y} \Big|_{y=0, |x|<\infty}. \quad (2.16)$$

$$T^{(1)*}(x, y) \Big|_{y=0, |x|\leq l} = T^{(1)-}(x, y) \Big|_{y=0, |x|\leq l},$$

$$\frac{\partial T^{(1)*}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, |x|\leq l} = \frac{\partial T^{(1)-}(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0, |x|\leq l},$$

где $T_{(\pm)}^{\pm}$ – температура на разрезах.

Здесь символ «+» соответствует $\tau=1$ при подходе к $y=0$ сверху, символ «-» соответствует $\tau=2$ при подходе к $y=0$ снизу.

3. Определение термических напряжений и деформаций в слое

Напряженно-деформированное состояние среды в приближении квазистатики описывается уравнениями связи между напряжениями, деформациями и температурой для ортотропной микро-

слоистой среды в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= c_{11}(y)e_x + c_{12}(y)e_y + \alpha_1(y)T(x, y), \\ \sigma_y &= c_{12}(y)e_x + c_{22}(y)e_y + \alpha_2(y)T(x, y), \\ \tau_{xy} &= c_{66}(y)e_{xy}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

где u, v – компоненты вектора перемещения.

Уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим уравнения равновесия в перемещениях в виде

$$c_{11}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{66}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (c_{12}(y) + c_{66}(y)) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial c_{11}(y)}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha_1(y) \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} c_{66}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{22}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{66}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_{12}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ + \frac{\partial c_{22}(y)}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial c_{12}(y)}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \alpha_2(y)}{\partial y} T(x, y) - \\ - \alpha_2(y) \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Здесь $c_{ij}(y)$, $\alpha_j(y)$ коэффициенты упругости и теплоемкости соответственно.

Аналогично (1.19) представим $c_{ij}(y)$, $\alpha_j(y)$ в виде

$$c_{ij}^{(\tau)}(y) = c_{ij}^{0(\tau)} \exp(\beta^{(\tau)} y / l), \quad i, j = 1, 2, 6. \quad (3.4)$$

$$\alpha_j^{(\tau)}(y) = \alpha_j^0 \exp(\gamma^{(\tau)} y / l), \quad k = 1, 2. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4), (3.5) в (3.3), получим

$$\begin{aligned} c_{11}^{0(\tau)} \frac{\partial^2 u^{(\tau)}}{\partial x^2} + c_{66}^{0(\tau)} \frac{\partial^2 u^{(\tau)}}{\partial y^2} + (c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}) \frac{\partial^2 v^{(\tau)}}{\partial x \partial y} + \\ + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \left(\frac{\partial u^{(\tau)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(\tau)}}{\partial x} \right) - \alpha_1^{0(\tau)} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial x} = 0, \\ c_{66}^{0(\tau)} \frac{\partial^2 v^{(\tau)}}{\partial x^2} + c_{22}^{0(\tau)} \frac{\partial^2 v^{(\tau)}}{\partial y^2} + (c_{66}^{0(\tau)} + c_{12}^{0(\tau)}) \frac{\partial^2 u^{(\tau)}}{\partial x \partial y} + \\ + c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \frac{\partial v^{(\tau)}}{\partial y} + c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \frac{\partial u^{(\tau)}}{\partial x} - \alpha_2^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} T^{(\tau)} - \\ - \alpha_2^{0(\tau)} \frac{\partial T^{(\tau)}}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $c_{(\alpha)}^{(\tau)}$ – константы, зависящие как было показано в первом разделе от характера распределения

неоднородности и от номера макрослоя.

Применяя преобразование Фурье по x к уравнениям (3.6), (3.7), получим

$$\begin{aligned}
 & -c_{11}^{0(\tau)} p^2 \tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y) + c_{66}^{0(\tau)} \frac{d^2 \tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} - \\
 & -ip(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}) \frac{d\tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} + \\
 & + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \left(\frac{d\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} - ip\tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y) \right) + \\
 & + \alpha_1^{0(\tau)} ip\tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y) = 0, \\
 & -c_{66}^{0(\tau)} \lambda^2 \tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y) + c_{22}^{0(\tau)} \frac{d^2 \tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy^2} - \\
 & -ip(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}) \frac{d\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} + \\
 & + c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \frac{d\tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} - c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} ip\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y) - \\
 & - \alpha_2^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y) - \alpha_2^{0(\tau)} \frac{d\tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y)}{dy} = 0, \\
 & [\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y), \tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [u^{(\tau)}(x, y), v^{(\tau)}(x, y)] e^{i\lambda x} dx.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y)$, $\tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y)$ является неоднородной за счет температурных членов $\tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y)$, $d\tilde{T}^{(\tau)}(\lambda, y)/dy$, которые были найдены в разделе 1. Представляя решение уравнений (3.7) в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного, берем решение однородного уравнения в виде

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}^{(\tau)}(\lambda, y) &= \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) \exp(\eta y), \\
 \tilde{v}^{(\tau)}(\lambda, y) &= \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) \exp(\eta y),
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

и получим характеристическое уравнение для однородного уравнения в виде

$$\begin{aligned}
 & -c_{11}^{0(\tau)} \lambda^2 \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) + c_{66}^{0(\tau)} \eta^2 \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) - (c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}) i\lambda \eta \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) + \\
 & + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) - i\lambda c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) = 0, \\
 & -c_{66}^{0(\tau)} \lambda^2 \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) + c_{22}^{0(\tau)} \eta^2 \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) - (c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}) i\lambda \eta \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) + \\
 & + c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \eta \tilde{V}^{(\tau)}(\lambda) - c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \tilde{U}^{(\tau)}(\lambda) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Линейная однородная система алгебраических уравнений относительно $\tilde{U}^{(\tau)}(\lambda)$, $\tilde{V}^{(\tau)}(\lambda)$ имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix}
 -c_{11}^{0(\tau)} \lambda^2 + c_{66}^{0(\tau)} \eta^2 + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} & -(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}) i\lambda \eta - i\lambda c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \\
 -(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}) i\lambda \eta - i\lambda c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} & -c_{66}^{0(\tau)} \lambda^2 + c_{22}^{0(\tau)} \eta^2 + \eta c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)}
 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.10}$$

Определитель (3.10) приводится к виду

$$\begin{aligned}
 & (c_{66}^{0(\tau)} \eta^2 + c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \eta - c_{11}^{0(\tau)} \lambda^2) (c_{22}^{0(\tau)} \eta^2 + \eta c_{22}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} - c_{66}^{0(\tau)} \lambda^2) + \\
 & + [(c_{12}^{0(\tau)} + c_{66}^{0(\tau)}) \lambda \eta + \lambda c_{66}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)}] \times \\
 & \times [(c_{66}^{0(\tau)} + c_{12}^{0(\tau)}) \lambda \eta + c_{12}^{0(\tau)} c_{(\alpha)}^{(\tau)} \lambda] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Уравнение (3.11) относительно η запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & \eta^4 + A^{(\tau)} \eta^3 + B^{(\tau)} \eta^2 + C^{(\tau)} \eta + D^{(\tau)} = 0, \\
 & A^{(\tau)} = 2c_{(\alpha)}^{(\tau)}, \quad B = c_{(\alpha)}^{2(\tau)} + N, \\
 & N^{(\tau)} = \lambda^2 [c_{12}^{02(\tau)} + 2c_{66}^{0(\tau)} c_{12}^{0(\tau)} - c_{11}^{0(\tau)} c_{22}^{0(\tau)}] [c_{22}^{0(\tau)} c_{66}^{0(\tau)}]^{-1}, \\
 & c^{(\tau)} = c_{(\alpha)}^{(\tau)} N, \quad D^{(\tau)} = \lambda^2 [c_{11}^{0(\tau)} p^2 + c_{12}^{0(\tau)}] [c_{22}^{0(\tau)}]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Корни характеристического уравнения (3.12) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \eta_{1,2}^{(\tau)} &= -\frac{A^{(\tau)}}{4} + \frac{1}{4} \times \\
 & \times \sqrt{c_{(\alpha)}^{2(\tau)} - 2(B^{(\tau)} - C_{(\alpha)}^{2(\tau)}) \pm 2\sqrt{\frac{1}{4} A^{2(\tau)} - 2(B^{(\tau)} - c_{(\alpha)}^{(\tau)}) - 4D^{(\tau)}(p)}}, \\
 \eta_{3,4}^{(\tau)} &= -\frac{A^{(\tau)}}{4} - \\
 & -\frac{1}{4} \sqrt{c_{(\alpha)}^{2(\tau)} - 2(B^{(\tau)} - C_{(\alpha)}^{2(\tau)}) \pm 2\sqrt{\frac{1}{4} A^{2(\tau)} - 2(B^{(\tau)} - c_{(\alpha)}^{(\tau)}) - 4D^{(\tau)}(p)}}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Представим решения неоднородных дифференциальных уравнений (3.7), (3.8) в виде суммы общих решений однородных уравнений и частных решений неоднородных уравнений, в которых правая часть зависит от температуры:

$$\begin{aligned}
 u^{(\tau)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} \right) e^{i\lambda x} d\lambda + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{(1)}^{(\tau)}(\lambda, y) e^{i\lambda x} d\lambda, \\
 v^{(\tau)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^4 S_k^{(\tau)}(\lambda) M_k^{(1)(\tau)}(\lambda) \eta_k^{(\tau)} y \right) e^{i\lambda x} d\lambda + \\
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{(2)}^{(\tau)}(\lambda, y) e^{i\lambda x} d\lambda.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Неизвестные константы $S_k^{(\tau)}(\lambda)$, $\eta_k^{(\tau)}(\lambda)$ находятся из силовых граничных условий. Выражения для $T_{(i)}^{(\tau)}(\lambda, y)$ получены на основе решений для уравнения теплопроводности (1.20).

На основе формул (3.13), (3.14) вычислим деформации и напряжения:

$$e_x^{(\tau)} = \frac{\partial U^{(\tau)}}{\partial x} = ip[U_{(0)}^{(\tau)}(x, y) + u_{(1)}^{(\tau)}(x, y)]$$

$$e_y^{(\tau)} = \frac{\partial v^{(\tau)}}{\partial y} \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \mu_k^{(\tau)} S_k^{(\tau)}(\lambda) \eta_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(0)}(\lambda, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y)}{\partial y} \Big] \times$$

$$\times e^{\lambda x} d\lambda, \quad (3.15)$$

$$e_{xy}^{(\tau)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \eta_k^{(\tau)} S_k^{(\tau)}(\lambda) e^{\eta_k^{(\tau)} y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(0)}(\lambda, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}_{(\tau)}^{(1)}(\lambda, y)}{\partial y} \Big] \times$$

$$\times e^{\lambda x} d\lambda + ip[V_{(0)}^{(\tau)}(x, y) + V_{(1)}^{(\tau)}(x, y)].$$

Подставляя (3.15) в соотношения (3.1), получим выражения для напряжений:

$$\sigma_x^{(\tau)} = c_{11}^{(\tau)}(y)e_x^{(\tau)} + c_{12}^{(\tau)}(y)e_y^{(\tau)} + \alpha_1^{(\tau)}(y)T^{(\tau)},$$

$$\sigma_y^{(\tau)} = c_{12}^{(\tau)}(y)e_x^{(\tau)} + c_{22}^{(\tau)}(y)e_y^{(\tau)} + \alpha_2^{(\tau)}(y)T^{(\tau)}, \quad (3.16)$$

$$\tau_{xy}^{(\tau)} = c_{66}^{(\tau)}(y)e_{xy}^{(\tau)}.$$

Граничные условия в напряжениях рассмотрим для случая, когда границы $y = H_1$, $y = -H_2$ свободны от силовых нагрузок и подвергаются только действию потоков тепла:

$$\sigma_y^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = \sigma_y^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_2}^{\tau=2} =$$

$$= \tau_{xy}^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_1}^{\tau=1} = \tau_{xy}^{(\tau)}(x, y) \Big|_{y=H_2}^{\tau=2} = 0. \quad (3.17)$$

Граничные условия на разрезах:

$$\tau_{xy}^+(x, y) \Big|_{y=0^+} = \tau_{xy}^-(x, y) \Big|_{y=0^-} = \Gamma_1(x), \quad (3.18)$$

$$\sigma_{yy}^+(x, y) \Big|_{y=0^+} = \sigma_{yy}^-(x, y) \Big|_{y=0^-} = \Gamma_2(x)$$

В области перемычки $y = 0$, $-l \leq x \leq l$ для производных полевых величин u , v имеем соотношения

$$\frac{\partial u^+(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u^-(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial v^+(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v^-(x, y)}{\partial x}. \quad (3.19)$$

В соотношениях (3.18), (3.19) знак «+» соответствует $\tau = 1$, знак «-» соответствует $\tau = 2$. Для дальнейшего рассмотрения целесообразно перейти к безразмерным величинам, по формулам:

$$\hat{T}^{(\tau)} = \tilde{T}^{(\tau)} / (-Q_0 l / \Lambda_{22}^0),$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x^{(\tau)} \\ \hat{\sigma}_y^{(\tau)} \\ \hat{\tau}_{xy}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^{(\tau)} \\ \sigma_y^{(\tau)} \\ \tau_{xy}^{(\tau)} \end{pmatrix} (-E_0 Q_0 \alpha_0 l / \Lambda_{22}^0)^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^{(\tau)} \\ \hat{v}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(\tau)} \\ v^{(\tau)} \end{pmatrix} (-Q_0 \alpha_0 l^2 / \Lambda_{22}^0)^{-1}, \quad (3.20)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\delta}^{(\tau)} \\ \hat{\beta}^{(\tau)} \\ \hat{\gamma}^{(\tau)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{(\tau)} \\ \beta^{(\tau)} \\ \gamma^{(\tau)} \end{pmatrix} l, \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{H}_1 \\ \hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} l^{-1}.$$

Здесь символ « Λ » сверху, которым обозначены безразмерные величины в дальнейших рассмотренных опускаем имея в виду, что все величины являются безразмерными. В безразмерных величинах перемычка в пластине будет расположена в плоскости $y = 0$ для $-1 < x < 1$, а разрезы простираются в плоскости $y = 0$ для $-\infty < x \leq -1$, $1 \leq x < \infty$. В дальнейшем будем рассматривать случай микрослоистой среды, в которой теплофизические и упругие коэффициенты в зависимости от y изменяются непрерывно, а их градиенты (производные) терпят скачок при $y = 0$. Это означает, что $\Lambda_{ij}^{0(1)} = \Lambda_{ij}^{0(2)}$, $\alpha_1^{0(1)} = \alpha_2^{0(2)}$, $c_{ij}^{0(1)} = c_{ij}^{0(2)}$, $\delta^{(2)} - \delta^{(1)} \neq 0$, $\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)} \neq 0$, $\beta^{(2)} - \beta^{(1)} \neq 0$, $k_0^{(1)} = k_0^{(2)}$.

4. Вычисление распределения температуры в слоях

Стационарное распределение температуры, описываемое уравнением (1.20) и его решение представляемое в виде суперпозиции (1.21), где $T_{(\tau)}^{(0)}(y)$ дается выражением (1.25), а $T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)$ записывается в виде обратного преобразования Фурье (1.29).

Рассмотрим случай задания граничных условий в виде (2.2), что соответствует заданию потоков тепла на внешних границах слоя $y = H_1$, $y = -H_2$. На разрезах $y = 0$, $l \leq |x| < \infty$ и используем условия в форме (2.15), а на перемычке $|x| < l$ условия идеального контакта (2.19). Подставляя в граничные условия выражения для $T_{(\tau)}^{(0)}(y)$, $T_{(\tau)}^{(1)}(x, y)$, получим уравнения для нахождения неизвестных $A^{(\tau)}(\lambda)$, $B^{(\tau)}(\lambda)$. Полученные соотношения представляют собой интегральные уравнения относительно неизвестных $A^{(\tau)}(\lambda)$, $B^{(\tau)}(\lambda)$, решение которых обычно получают с использованием метода интеграла Коши. Согласно методу [1, 2], введем функцию

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{\partial}{\partial x} [T(x, 0^+) - T(x, 0^-)] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [T^{(1)}(x, 0^+) - T^{(1)}(x, 0^-)]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\int_{-1}^1 \gamma(x) dx = 0, \quad \gamma(x) = 0, \quad |x| > 1. \quad (4.2)$$

Для теплоизолированных трещин выполняются условия

$$\left. \frac{\partial T^+}{\partial y} \right|_{y=0^+, |x|<1} = \left. \frac{\partial T^-}{\partial y} \right|_{y=0^-, |x|<1} = 0, \quad (4.3)$$

которое с учетом представления (1.21) дает соотношение

$$\frac{\partial T^{(1)+}}{\partial y} = \frac{\partial T^{(1)-}}{\partial y} = -\frac{\partial T^{(0)}}{\partial y} = q(x), \quad |x| < 1, \quad y = 0. \quad (4.4)$$

Условие непрерывности температуры в вершине трещины имеет вид

$$T^{(1)+}(x, 0^+) = T^{(1)-}(x, 0^-) \quad \text{при } x = \pm 1. \quad (4.5)$$

Тогда для нахождения функции $\gamma(x)$ получаем интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(K(x, t) + \frac{1}{t-x} \right) \gamma(t) dt = \frac{2}{\sqrt{k_0}} (q-1). \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \int_0^\infty \left(\frac{2(\mu_1 N_1 + \mu_2)}{\mu N_4} - 1 \right) \sin \mu(x-t) d\mu, \\ N_1 &= -\frac{\mu_2}{\mu_1} e^{(\mu_2 - \mu_1)H_1}, \quad N_2 = \frac{\mu_2(1 - e^{(\mu_2 - \mu_1)H_1})}{\mu_3(1 - e^{(\mu_4 - \mu_3)H_2})}, \\ N_3 &= \frac{\mu_2(1 - e^{(\mu_2 - \mu_1)H_1})}{\mu_4(1 - e^{(\mu_4 - \mu_3)H_2})}, \quad N_4 = N_1 + N_2 - N_3 + 1, \\ N_5 &= \frac{2(\mu_1 N_1 + \mu_2)}{\mu N_4 \sqrt{k_0}}. \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов $A^{(\tau)}$, $B^{(\tau)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \frac{N_1}{N_4} \beta, \quad B^{(1)} = \frac{1}{N_4} \beta, \quad A^{(2)} = \frac{N_2}{N_4} \beta, \\ B^{(2)} &= \frac{N_3}{N_4} \beta, \quad \beta = \frac{1}{i\mu} \int_{-1}^1 \gamma(x) e^{i\mu x} dx. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Решение уравнения (4.6) ищем в виде

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j T_j(x), \quad (4.8)$$

где $T_j(x)$ – полиномы Чебышева первого рода,

константы α_j должны быть найдены из системы алгебраических уравнений, которая получается после подстановки (4.8) в (4.6) и использования формулы Гаусса–Чебышева [1, 2, 9, 11].

Из условия (4.2) следует, что $\alpha_0 = 0$, а для нахождения коэффициентов $\alpha_j (j=1, 2, \dots)$ получается система уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j V_{j-1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j K(x) = \frac{2}{\sqrt{k_0}} (q-1), \quad |x| < 1. \quad (4.9)$$

Здесь $K_j(x)$ полиномы Чебышева второго рода:

$$K_j(x) = (-1)^{k+1} \int_0^\infty (N_5(\mu) - 1) J_j(\mu) \sin(\mu x) d\mu$$

для четных $j = 2k, k = 1, 2, \dots$,

$$K_j(x) = (-1)^k \int_0^\infty (N_5(\mu) - 1) J_j(\mu) \cos(\mu x) d\mu \quad (4.10)$$

для нечетных $j = 2k + 1, k = 1, 2, \dots$,

где $J_j(\mu)$ – функции Бесселя.

Разобьем интервал $|x| < 1$ на части точками

$$x_l = \cos\left(\frac{l\pi}{n+1}\right), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (4.11)$$

тогда подставляя (4.9) в (4.8), получим систему алгебраических уравнений, удобную для численного счета

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\sin\left(\frac{j l \pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{l \pi}{n+1}\right)} + \sum_{j=1}^n \alpha_j K_j(x_l) = \frac{2}{\sqrt{k_0}} (q_l - 1) \quad (4.12)$$

$$q_l = q(x_l), \quad j, l = 1, 2, \dots, n.$$

Вычисляя коэффициенты α_j из (4.12) и подставляя в (4.8), получим приближенное выражение $\gamma(x)$ через значения $q(x)$, а затем представление для распределения температуры в слое.

5. Вычисление напряжений в композитном слое

Выпишем в (3.16) выражения для $\sigma_y^{(\tau)}$ в явном виде для $\tau=1$ в верхнем слое и для $\tau=2$ в нижнем слое соответственно:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)}(x, y) &= \\ &= \frac{e^{-\beta_1 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{1k}(\lambda) M_{3k}(\lambda) e^{\gamma_k^{(1)} y} + T_{3\pm 1}(\lambda, y) \right) e^{\lambda x} d\lambda - \\ &- \beta_{20} \frac{1}{\delta_1} e^{(\gamma_1 - \beta_1) y} + \frac{1}{\delta_1} \beta_{20} e^{(\gamma_1 - \delta_1 - \beta_1) y}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_1 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{1k}(\lambda) M_{4k}(\lambda) e^{\eta_k^{(1)} y} + T_{3\xi_2}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (5.2)$$

$$\sigma_y^{(2)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_2 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{2k}(\lambda) M_{5k}(\lambda) e^{\eta_k^{(2)} y} + T_{3\xi_3}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda - (5.3)$$

$$- \beta_{20} \frac{1}{\delta_2} e^{(\gamma_2 - \beta_2) y} + \frac{\beta_{20}}{\delta_2} e^{(\gamma_2 - \delta_2 - \beta_2) y}.$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, y) = \frac{e^{-\beta_2 y}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^4 S_{2k}(\lambda) M_{6k}(\lambda) e^{\eta_k^{(2)} y} + T_{3\xi_4}(\lambda, y) \right) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (5.4)$$

Выражения для $S_{\alpha k}(\lambda)$, $T_{\alpha\xi\beta}(\lambda)$ здесь не приводятся ввиду громоздкости. Их вычисление проводится аналогично тому как это было сделано в разделе 4 для температурного поля: из граничных условий (3.17), (3.18) с использованием метода интеграла Коши. Подставляем затем полученные выражения для коэффициентов $S_{\alpha k}(\lambda)$ в формулы (3.14) и используем краевые условия (3.19), тогда получаем сингулярные интегральные уравнения

$$\frac{\Omega_1(x)}{I_1} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{\Gamma_1(t)}{t-x} \right) + k_{11}(x, t) \Gamma_1(t) + k_{12}(x, t) + \Gamma_2(t) dt \right],$$

$$\frac{\Omega_2(x)}{I_2} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{\Gamma_2(t)}{t-x} \right) + k_{21}(x, t) \Gamma_1(t) + k_{22}(x, t) + \Gamma_2(t) dt \right].$$

Здесь I_j , k_{ij} , Ω_j ($i, j = 1, 2$) вычисляются аналогично разделу 4, но имеют значительно более громоздкий вид, который здесь не приводится.

В области перемычки аналогично разделу 4 выполняются условия

$$\int_{-1}^1 \Gamma_1(t) dt = \int_{-1}^1 \Gamma_2(t) dt = 0. \quad (5.7)$$

Сингулярные интегралы в (5.5), (5.6) вычисляются аналогично разделу 4 для нахождения температуры в пластине. Представляя $\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$ в виде

$$\Gamma_{(i)}(x) = \frac{G_{(i)}(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad G_{(i)}(x) = \sum_{j=1}^N a_j^{(i)} T_j(x), \quad (i=1,2) \quad (5.8)$$

сведем систему интегральных уравнений (5.5), (5.6) с учетом (5.7) разбивая отрезок $|x| < 1$ к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных коэффициентов a_j , i , ($i = 1, 2$), которую можно записать в виде:

$$\frac{\Omega_1(x_m)}{I_1} = \sum_{l=1}^N \left[\left(\frac{1}{t_l - x_m} + k_{11}(x_m, t_l) \frac{G_1(t_l)}{N} + k_{12}(x_m, t_l) \frac{G_2(t_l)}{N} \right) \right] \quad (5.9)$$

$$\frac{\Omega_2(x_m)}{I_{22}} = \sum_{l=1}^N \left[k_{21}(x_m, t_l) \frac{G_1(t_l)}{N} + \left(\frac{1}{t_l - x_m} + k_{22}(x_m, t_l) \right) \frac{G_2(t_l)}{N} \right] \quad (5.10)$$

$$\sum_{l=1}^N \frac{G_1(t_l)}{N} = \sum_{l=1}^N \frac{G_2(t_l)}{N} = 0,$$

$$t_l = \cos\left(\frac{2l-1}{2N}\pi\right), \quad x_m = \left(\cos\frac{m}{N}\right), \quad l, m = 1 \dots N-1 \quad (5.11)$$

Вычисляя коэффициенты $a_j^{(i)}$, получим распределение напряжений в полосе с разрезами, находящейся под воздействием заданных на внешних границах $y = H_1$, $y = -H_2$ тепловых потоков.

Из вышеприведенных вычислений следует, что в микрослоистой ортотропной полосе с разрезами, находящейся под воздействием тепловых потоков, наличие трещин расслоения ведет к появлению напряжений.

Полученные уравнения позволяют вычислить коэффициенты концентрации напряжений в окрестности кончиков трещин в зависимости от расстояния между трещинами, толщины слоев H_1 , H_2 и других параметров задачи.

6. Расчет коэффициентов интенсивности напряжений

Рассмотрим влияние характера микронеоднородности коэффициентов теплопроводности, упругости, теплоемкости на коэффициенты интенсивности напряжений.

Коэффициенты концентрации напряжений вычисляются по формулам [1]

$$K_I^{\pm} - iK_{II}^{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm 1} \left[\sqrt{1-x^2} (\sigma_y^{\pm}(x) - i\tau_{xy}^{\pm}(x)) \right], \quad (6.1)$$

где для данного раздела 5 принято знак «+» относиться к правой трещине, знак «-» относится к левой.

Коэффициенты K_I^{\pm} и K_{II}^{\pm} выражаются непосредственно через функции G_i ($i=1,2$), вычисляемые в точках $x = \pm 1$:

$$K_I^{\pm} = (\pm 1) = G_1(\pm 1); \quad K_{II}^{\pm} = (\pm 1) = G_2(\pm 1). \quad (6.2)$$

Подставляя в (6.2) $G_i(\pm 1)$ из формул (5.8), получим выражения для коэффициентов интенсивности напряжений. Предельные случаи изо-

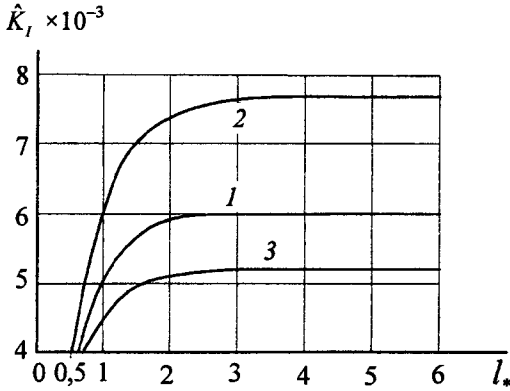


Рис. 2. Зависимость \hat{K}_I от l_* при $\gamma_2/\gamma_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$:
1 — $\beta_2/\beta_1 = 1$; 2 — $\beta_2/\beta_1 = 0,5$; 3 — $\beta_2/\beta_1 = 2$

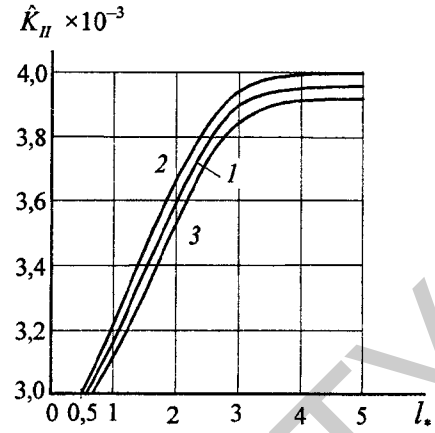


Рис. 3. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* при $\gamma_2/\gamma_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$:
1 — $\beta_2/\beta_1 = 1$; 2 — $\beta_2/\beta_1 = 0,5$; 3 — $\beta_2/\beta_1 = 2$

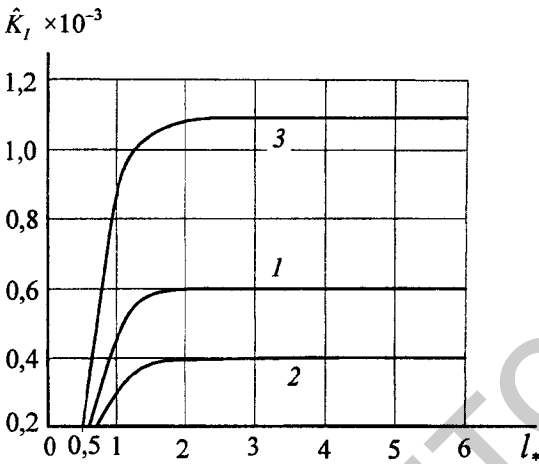


Рис. 4. Зависимость \hat{K}_I от l_* при $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1 = 1$:
1 — $\delta_2/\delta_1 = 1$; 2 — $\delta_2/\delta_1 = 0,5$; 3 — $\delta_2/\delta_1 = 2$

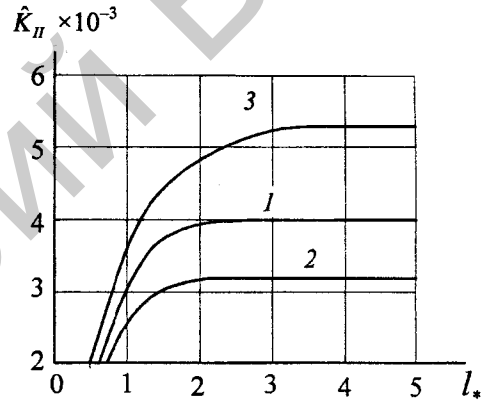


Рис. 5. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* при $\beta_2/\beta_1 = \gamma_2/\gamma_1 = 1$:
1 — $\delta_2/\delta_1 = 1$; 2 — $\delta_2/\delta_1 = 0,5$; 3 — $\delta_2/\delta_1 = 2$

тропной однородной неограниченной пластины с двумя разрезами находим, полагая в полученных формулах параметры $\delta^{(e)} = \beta^{(e)} = \gamma^{(e)} = 1$, $\Lambda_{11} = \Lambda_{22}$, $c_{11} = c_{66}$, $\alpha_1 = \alpha_2$ [1, 7–9].

Зависимости безразмерных коэффициентов концентрации напряжений $\hat{K}_i^\pm = K_i^\pm / K_0$, ($i = I, II$), ($K_0 = -E_0 \alpha_0 l q_H / \Lambda_{22}^0$) от безразмерной величины H_1 / l , характеризующей толщину слоя (H_1) и расстояние между трещинами (l) изображены на рис. 2–7. Здесь учитывается влияние безразмерных параметров $\delta_2 \delta_1^{-1}$, $\gamma_2 \gamma_1^{-1}$, $\beta_2 \beta_1^{-1}$, характеризующих изменение теплопроводных, теплоемкостных, упругих свойств при переходе от одного слоя к другому. В случае равенства этих параметров единице неоднородность от слоя к слою имеет один и тот же тип. Меняя распределение неоднородных свойств по слою, а также от слоя к слою получаем возможность влиять на величину коэффициентов концентрации напряжений.

Изменение неоднородности от слоя к слою учитывается на уровне изменения градиента неоднородности при $y = 0$. Как следует из (1.19), (3.4) сами коэффициенты при переходе через $y = 0$ непрерывны, а скачок, равный разностям $|\beta_2 - \beta_1| l^{-1}$, $|\gamma_2 - \gamma_1| l^{-1}$, $|\delta_2 - \delta_1| l^{-1}$ испытывают их производные. Таким образом, микрослоистость имеет достаточно гладкий характер.

На рис. 2, 3 изображены зависимости \hat{K}_I , \hat{K}_{II} от $l_* = H_1 / l$ в случае, когда при переходе через $y = 0$ скачок испытывает только градиент упругих свойств, а градиенты теплопроводности и теплоемкости непрерывны.

На рис. 4, 5 изображены зависимости \hat{K}_I , \hat{K}_{II} от $l_* = H_1 / l$ в случае, когда при переходе через $y = 0$ скачок испытывает только градиент теплопроводных свойств, а градиенты упругости и теплоемкости непрерывны.

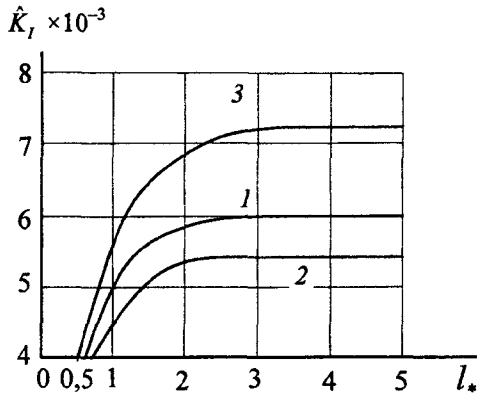


Рис. 6. Зависимость \hat{K}_I от l_* при $\beta_2/\beta_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$:
 1 - $\gamma_2/\gamma_1 = 1$; 2 - $\gamma_2/\gamma_1 = 0,5$; 3 - $\gamma_2/\gamma_1 = 2$

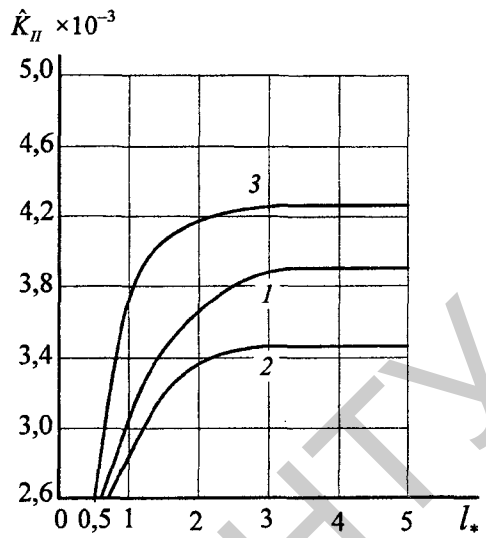


Рис. 7. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* при $\beta_2/\beta_1 = \delta_2/\delta_1 = 1$:
 1 - $\gamma_2/\gamma_1 = 1$; 2 - $\gamma_2/\gamma_1 = 0,5$; 3 - $\gamma_2/\gamma_1 = 2$

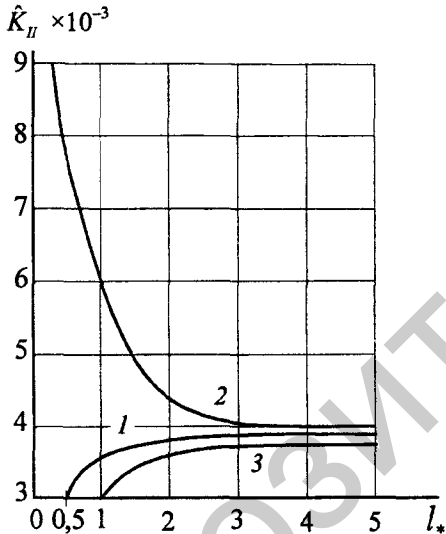


Рис. 8. Зависимость \hat{K}_{II} от l_* при $\gamma_1/\gamma_2 = \delta_2/\delta_1 = \beta_2/\beta_1 = 1$:
 1 - $H_2/H_1 = 1$; 2 - $H_2/H_1 = 0,5$; 3 - $H_2/H_1 = 2$

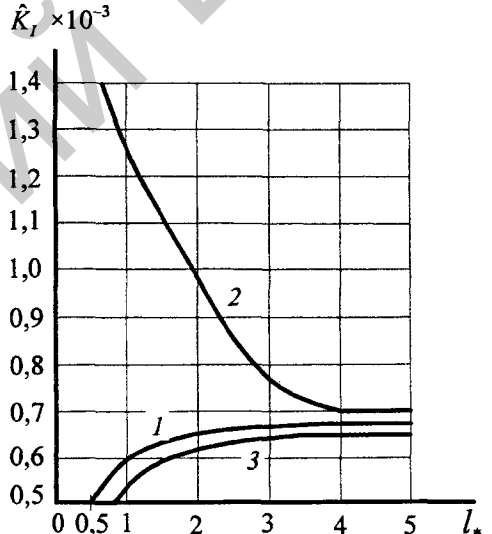


Рис. 9. Зависимость \hat{K}_I от l_* при $\gamma_1/\gamma_2 = \delta_2/\delta_1 = \beta_2/\beta_1 = 1$:
 1 - $H_2/H_1 = 1$; 2 - $H_2/H_1 = 0,5$; 3 - $H_2/H_1 = 2$

На рис. 6, 7 изображены зависимости \hat{K}_I , \hat{K}_{II} от $l_* = H_1/l$ в случае, когда при переходе через $y=0$ скачок испытывает только градиент теплоемкости, а градиенты упругих и теплопроводных свойств непрерывны.

Из рис. 2-7 следует, что зависимости \hat{K}_I , \hat{K}_{II} от отношения толщины верхнего слоя к расстоянию между трещинами качественно выглядят одинаково, однако есть различия. Если жесткость верхнего слоя, больше чем нижнего, то коэффициенты \hat{K}_I , \hat{K}_{II} больше по сравнению со средой, в которой градиент упругости непрерывен (рис. 2, 3).

Если теплопроводность верхнего слоя выше теплопроводности нижнего, то это ведет к сниже-

нию величин \hat{K}_I , \hat{K}_{II} по сравнению с гладким изменением градиента теплопроводности при переходе через границу $y=0$.

Представляет интерес оценить влияние отношения H_2/H_1 на зависимость \hat{K}_I , \hat{K}_{II} от l_* , т.е. от глубины, на которой происходит расслоение полосы. На рис. 8, 9 изображены зависимости \hat{K}_I , \hat{K}_{II} от l_* для случаев $H_1 \geq H_2$. Неоднородность физико-механических параметров гладкая.

Из рис. 8, 9 следует, что если верхний слой толще нижнего, то величина концентрации напряжений возрастает, по сравнению с полосой для которой $H_1 = H_2$.

Выводы

1. В пластине из ортотропного микрослоистого материала под действием тепловых потоков возникают поля напряжений, интенсивность которых у концов трещин возрастает.

2. В случае материалов градиентного типа решение задачи о расчете коэффициентов концентрации напряжений у концов разрезов удается свести к уравнениям несвязанной стационарной термоупругости однородного ортотропного тела.

3. Решение полученной системы уравнений проводится по схемам применения метода разделения переменных, интегрального преобразования Фурье, получения сингулярных уровней, их решения методом разложения по функциям Чебышева и получения выражений для коэффициентов интенсивности напряжений.

4. Установлено, что скачок градиентов коэффициентов упругости, теплопроводности, теплоемкости различным образом влияет на зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от расстояния разрезов от свободной границы и расстояния между разрезами.

5. Отношение расстояний разрезов от верхней и нижней свободных границ также оказывает существенное влияние на зависимость коэффициента интенсивности напряжений от расстояния между разрезами.

Литература

1. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. – Киев: «Наукова думка», 1976. – 443 с.
2. Кит, Г.С. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин / Г.С. Кит, О.В. Побережный. – Киев: «Наукова думка», 1992. – 216 с.
3. Зобнин, В.А. Центральная поперечная трещина в ортотропной упругой полосе / В.А. Зобнин, В.А. Ломакин. – Изд-во АН ССР МТТ, – № 1, – 1974. – С. 44–52.
4. Прусов, И.А. Термоупругие анизотропные пластинки / И.А. Прусов. – Мн.: Из-во БГУ, 1978. – 199 с.
5. Плещачевский, Ю.М. Динамика металлополимерных систем / Ю.М. Плещачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: «Беларусская наука», 2004. – 385 с.
6. Подстригач, Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – Москва: Изд-во «Наука», 1984. – 388 с.
7. Erdogan, F. The crack problem in bonded non-homogeneous materials / F. Erdogan, A.C. Kaya, P.F. Joseph // J. Appl. Mech. – 1991. – N 58. – Pp. 410–418.
8. Erdogan, F. The surface crack problem for a plate with functionally graded properties / F. Erdogan, B.H. Wu // ASME. J. of Appl. Mech. – 1997. – N 64. – Pp. 449–456.
9. El-Borgl, S. A partially insulated crack embedded in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading / S. El-Borgl, F. Erdogan, L. Hidri // Int. J. of Eng. Science. – 2004. – N 42. – Pp. 371–393.
10. Iton, S. Thermal stress intensity factors of an infinite orthotropic layer with a crack / S. Iton // Int. J. of Fracture. – 2000. – N 103. – Pp. 279–291.
11. Zhan, Y.T. A partially insulated interface crack between a graded orthotropic coating and a homogeneous orthotropic substrate under heat flux supply / Y.T. Zhan, X. Li, D.H. Yu // Int. J. of Solid and Struct. – 2010. – N 47. – Pp. 768–778.

Pleskachevsky Yu. M. and Chigareva Yu. A.

Thermal stress concentration in orthotropic plate with two-scale gradient inhomogeneity and cuts.

A three-dimensional problem about infinite plate with two rectilinear half-infinite cuts in the same plane being under the action of heat flows was considered. It was shown that stress fields arise in the plate from orthotropic microlaminated material under the action of heat flows. The intensity of the fields increases near crack ends. It was established that the gradient jump of the coefficients of elasticity, heat conductivity, heat capacity effects in a lot of ways on a dependence of the stress intensity coefficients on a cut distance from free border and a distance between borders..

Поступила в редакцию 24.05.2013.

© Ю. М. Плещачевский, Ю. А. Чигарева, 2013.